Séquence 13 : Arithmétique

OBJECTIFS :

À la fin de cette Séquence 13, je dois connaître…	Pour m'entraîner :		
• Le vocabulaire et les critères de divisibilité.	Cours partie A		
• La définition d'un nombre premier et tous les nombres premiers inférieurs à 50.	Cours partie B		
• La définition d'une fraction irréductible.	Cours partie C		
Je dois savoir faire…	**Pour m'entraîner :**		
	☆	☆☆	☆☆☆
• Effectuer une division euclidienne	n°1, 2, 13	n°3, 14	n°15
• Reconnaître les multiples et les diviseurs d'un nombre.	n°4, 16, 17	n°5, 18	
• Reconnaître un nombre premier.	n°20	n°7	n°8
• Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.	n°6, 19		n°21
• Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.	n°9, 22	n°10, 11	
• Résoudre des problèmes relevant de l'arithmétique.			n°12, 21, 23, 24

A) Divisibilité

1. Introduction

Poser la division euclidienne (avec reste) de 361 par 7. Comment appelle-t-on chacun des nombres ?

2. Cours

Dans tout ce cours, a et b sont des nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

Définition : Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux autres entiers positifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad r < b$$

dividende	diviseur	quotient	reste

Exemples :

- 361 divisé par 7 : $361 = 7 \times 51 + 4$.

  361 est le dividende, 7 est le diviseur, 51 est le quotient et 4 est le reste.

- 35 divisé par 5 : $35 = 5 \times 7 + 0$.

  35 est le dividende, 5 est le diviseur, 7 est le quotient et 0 est le reste : on dit que 35 est divisible par 5.

- 9 divisé par 15 : $9 = 15 \times 0 + 9$.

  9 est le dividende, 15 est le diviseur, 0 est le quotient et 9 est le reste (15 ne "rentre pas" dans 9)

Définition : Si le reste de la division euclidienne de a par b est nul (= 0), on dit que :

- b est un diviseur de a
- ou : a est divisible par b
- ou : a est un multiple de b

Cela revient à dire que b est « dans la table » de a.

Exemples :

- 5 × 3 = 15 donc on peut dire :
  - « 5 est un diviseur de 15 » OU « 15 est divisible par 5 » OU « 15 est un multiple de 5 »
  - « 3 est un diviseur de 15 » OU « 15 est divisible par 3 » OU « 15 est un multiple de 3 »
  - *ATTENTION : On ne peut PAS dire « 5 est divisible par 15 », « 15 est un diviseur de 3 » ou « 5 est un multiple de 15 » !!!*
- Tous les nombres pairs (qui se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8) sont divisibles par 2/sont des multiples de 2.
- 10 divise tous les nombres qui se terminent par 0 (comme 30, 4 560, 48 000…)

Critères de divisibilité :

- Si un entier est pair (se termine par 2, 4, 6 ou 8) alors il est divisible par 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3.
- Si le nombre formé par les 2 derniers chiffres d'un nombre est divisible par 4, alors ce nombre est divisible par 4.
- Si un nombre se termine par 0 ou 5, alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9.
- Si un nombre se termine par 0, alors il est divisible par 10.

Exemples :

- Nombres divisibles par 2 : 2 ; 14 ; 96 ; 848 ; 79 650…
- Nombres divisibles par 3 : 9 ; 135 (1+3+2 = 6 = 3x2) ; 9 765 (9+7+6+5 = 27 = 3x9)…
- Nombres divisibles par 4 : 504 ; 412 (12 = 4 × 3) ; 78 936 (36 = 4 × 9) ; 999 999 916 (16 = 4 × 4)…
- Nombres divisibles par 5 : 15 ; 840 ; 96 555 ; 142 960 ; 23 125…
- Nombres divisibles par 9 : 135 (1+3+5 = 9) ; 9 765 (9+7+6+5 = 27 = 9x3) ; 855 (8+5+5 = 18 = 9x2)…
- Nombres divisibles par 10 : 40 ; 560 ; 800 ; 789 950 ; 6 000 ; 7 524 000…

3) Exercices

Effectue les exercices suivants dans la partie « livret d'exercices » :

1, 2, 3, 4, 5

Tu peux aussi t'entraîner avec les exercices suivants :

13, 14, 15, 16, 17, 18

B) Nombres premiers

1. Introduction : le crible d'Ératosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Dans la grille ci-contre :

1) Commence par barrer le 1
2) Entoure 2 puis barre tous les multiples de 2.
3) Entoure le plus petit nombre non barré (c'est 3) puis barre tous ses multiples.
4) Répète l'étape 3 jusqu'à ce que tous les nombres de la grille soient barrés ou entourés.

Que peut-on dire des nombres entourés ?

2. Cours :

Définition : Un nombre premier est un entier positif qui a exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :

- 5 est un nombre premier car il n'est divisible que par 1 et par 5.
- Tous les nombres entourés dans le crible d'Ératosthène sont premiers !
- 4 n'est pas premier : il est divisible par 1 et par 4, mais aussi par 2 !
- ATTENTION : 1 n'est pas un nombre premier ! Il n'a qu'UN SEUL diviseur (lui-même !)
- À CONNAITRE PAR COEUR : Les nombres premiers inférieurs à 50 (il n'y en a que 15) :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47

Propriété : Tout nombre entier peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, et ce de manière unique (à l'ordre des facteurs près).

Méthode : Pour décomposer un nombre N en produit de facteurs premiers, on commence par chercher le plus petit nombre premier p qui divise N, on divise N par p, et si le quotient obtenu est différent de 1, on recommence jusqu'à obtenir 1 :

<table>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l}126 & \\ & \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l}126 & 2 \\ 63 & \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l}126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l}126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l}126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{r|l}126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>1) On trace un trait vertical et on écrit le nombre à décomposer à gauche.</td>
<td>2) 126 = 2 × 63</td>
<td>3) 63 n'est pas divisible par 2, on passe à 3 :
63 = 3 × 21</td>
<td>4) 21 = 3 × 7</td>
<td>5) 7 n'est pas divisible par 3, on passe à 5 puis 7 :
7 = 7 × 1</td>
<td>6) La décomposition est terminée :
$\boxed{126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7}$</td>
</tr>
</table>

Exemples : Décomposer les nombres 504, 2 530 et 728 :

$\begin{array}{r\|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $504 = 2\times2\times2\times3\times3\times7$ $= 2^3\times3^2\times7$	$\begin{array}{r\|l} 2\,530 & 2 \\ 1\,265 & 5 \\ 253 & 11 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$ $2\,530 = 2\times5\times11\times23$ Remarque : C'est pour ça qu'il est important de connaître les nombres premiers inférieurs à 50 !	$\begin{array}{r\|l} 728 & 2 \\ 364 & 2 \\ 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ $728 = 2\times2\times2\times7\times13$ $= 2^3\times7\times13$

3. Exercices :

Effectue les exercices suivants dans la partie « livret d'exercices » :

6, 7, 8

Tu peux aussi t'entraîner avec les exercices suivants :

19, 20, 21

C) Simplification de fractions

1. Introduction :

Comment peut-on écrire plus simplement les fractions $\frac{2}{4}$ et $\frac{10}{15}$?

2. Cours :

Ce que nous venons de découvrir sur les diviseurs et les nombres premiers à de multiples applications, en sciences, en ingénierie, en cryptographie… En maths, cela va aussi nous servir pour simplifier des fractions.

Définition : Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si les nombres a et b ont pour UNIQUE diviseur commun 1.

Remarque : On dit que a et b sont « premiers entre eux ».

Exemples :

- Les fractions suivantes sont irréductibles :
    - $\frac{3}{7}$: diviseurs de 3 : {1, 3} ET diviseurs de 7 : {1, 7}
    - $\frac{15}{4}$: diviseurs de 15 : {1, 3, 5, 15} ET diviseurs de 4 : {1, 2, 4}
    - $\frac{22}{9}$: diviseurs de 22 : {1, 2, 11, 22} ET diviseurs de 9 : {1, 3, 9}
    - $\frac{5}{8}$: diviseurs de 5 : {1, 5} ET diviseurs de 8 : {1, 2, 4, 8}

- Les fractions suivantes ne sont PAS irréductibles :
    - $\frac{6}{9}$: diviseurs de 6 : $\{\underline{1}, 2, \underline{3}, 6\}$ ET diviseurs de 9 : $\{\underline{1}, \underline{3}, 9\}$
    - $\frac{13}{26}$: diviseurs de 13 : $\{\underline{1}, \underline{13}\}$ ET diviseurs de 26 : $\{\underline{1}, 2, \underline{13}, 26\}$
    - $\frac{63}{21}$: diviseurs de 63 : $\{\underline{1}, \underline{3}, \underline{7}, 9, \underline{21}, 63\}$ ET diviseurs de 21 : $\{\underline{1}, \underline{3}, \underline{7}, \underline{21}\}$

Pour rendre une fraction irréductible, il faut se souvenir de la propriété suivante :

> Propriété : On ne change pas un quotient en multipliant ou en divisant son numérateur ET son dénominateur par un même nombre (non nul).

Cette propriété nous permet par exemple d'écrire :

$$\frac{3,1}{7} = \frac{3,1 \times 10}{7 \times 10} = \frac{31}{70} \qquad \text{OU :} \qquad \frac{18}{30} = \frac{18 \div 6}{30 \div 6} = \frac{3}{5}$$

> Méthode : Pour simplifier une fraction, la méthode la plus simple est de décomposer le numérateur ET le dénominateur en produit de facteurs premiers, puis de simplifier les facteurs identiques :

On veut simplifier la fraction $\frac{204}{72}$:

1) On décompose 204 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

204 = 2×2×3×17

2) On décompose 72 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

72 = 2×2×2×3×3

3) Il ne nous reste qu'à simplifier la fraction :

$$\frac{204}{72} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 17}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 17}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3} = \frac{17}{2 \times 2} = \frac{17}{6}$$

Exemples :

- $\frac{24}{36} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$
- $\frac{77}{88} = \frac{7 \times 11}{2 \times 2 \times 2 \times 11} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{8}$

3. Exercices :

Effectue les exercices suivants dans la partie « livret d'exercices » :

9, 10, 11

Tu peux aussi t'entraîner avec l'exercice suivant :

S13 : Arithmétique - <u>Livret d’exercices</u>

Exercices prioritaires

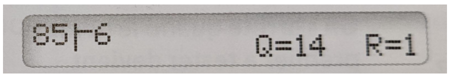
Exercice n°1 :

Laquelle de ces égalités correspond à la division euclidienne de 647 par 12 ?

a) 647 = 11 × 54 + 53	b) 647 = 12 × 53 + 11	c) 647 = 12 × 52 + 23

Exercice n°2 :

Sandra peut lire sur l’écran de sa calculatrice :



Traduire ce résultat par une égalité :

……

Exercice n°3 :

Rémy veut ranger 184 timbres dans un classeur pouvant contenir 36 timbres par page. Combien va-t-il utiliser de pages ?

……
……
……

Exercice n°4 :

Vrai ou faux ?

a) 36 est un multiple de 6 …………………………………………………………………	❑ VRAI	❑ FAUX
b) 6 est un diviseur de 49 …………………………………………………………………	❑ VRAI	❑ FAUX
c) 12 est un multiple de 24 …………………………………………………………………	❑ VRAI	❑ FAUX
d) 184 est divisible par 2 …………………………………………………………………	❑ VRAI	❑ FAUX
e) 250 est divisible par 5 …………………………………………………………………	❑ VRAI	❑ FAUX
f) 252 est divisible par 9 …………………………………………………………………	❑ VRAI	❑ FAUX

Exercice n°5 :

Déterminer tous les diviseurs des nombres suivants :

a) 128 : ……
b) 56 : ……..
c) 78 : ……..

Exercice n°6 :

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

12	18	28	50	45
42	75	164	630	5 005

Exercice n°7 :

Vrai ou Faux ?

			JUSTIFICATION :
a) Tout nombre est diviseur de lui-même	❑ VRAI	❑ FAUX	
b) 1 divise tout nombre entier	❑ VRAI	❑ FAUX	
c) Tout nombre impair est premier	❑ VRAI	❑ FAUX	
d) Tout nombre pair est premier	❑ VRAI	❑ FAUX	
e) Il y a une infinité de nombres premiers	❑ VRAI	❑ FAUX	
f) Il y a toujours un écart de 2 entre 2 nombres premiers	❑ VRAI	❑ FAUX	

Exercice 8 :

On dit que **deux nombres sont premiers entre eux** s'ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

1) Trouver tous les diviseurs de 45 :

………

2) Trouver tous les diviseurs de 28 :

………

3) Les nombres 45 et 28 sont-ils premiers entre eux ?

………

4) Peut-on trouver deux nombres *pairs* premiers entre eux ? Justifier.

………

………

5) Peut-on trouver deux nombres *impairs* premiers entre eux ? Justifier.

………

………

Exercice 9 :

Simplifie les fractions suivantes :

a) $\frac{138}{105}$ =
b) $\frac{144}{216}$ =
c) $\frac{192}{288}$ =
d) $\frac{245}{216}$ =
e) $\frac{48}{175}$ =
f) $\frac{120}{450}$ =
g) $\frac{1\ 925}{3\ 185}$ =
h) $\frac{504}{1\ 050}$ =
i) $\frac{2\ 604}{1\ 428}$ =
j) $\frac{12}{25}$ =

Exercice 10 :

Dans le village *Solidarity*, 1 520 personnes ont fait un don de charité sur 1 710 habitants en tout, tandis que dans le village *Solidaritat*, 1 840 personnes ont fait un don parmi les 2 070 habitants.

1) Exprimer pour chacun des villages la *proportion* de personnes qui ont effectué un don, sous forme d'une fraction, puis simplifier les deux fractions obtenues :

………

………

2) Que peut-on conclure sur la générosité des habitants de ces deux villages ?

………

………

………

Exercice 11 : (D'après DNB Amérique du Sud, 2005)

1) Compléter le tableau ci-dessous par « OUI » ou « NON » dans chaque case (en utilisant les critères de divisibilité) :

	2	5	9
1 035 est divisible par			
774 est divisible par			
322 est divisible par			

2) D'après ce tableau, les fractions $\frac{774}{1\ 035}$ et $\frac{332}{774}$ sont-elles irréductibles ?

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

3) La fraction $\frac{322}{1\ 035}$ est-elle irréductible ? Justifier.

………

………

Exercice 12 :

1) Écrire tous les diviseurs de 84 (il y en a 12 !) :

………

2) Trois pirates se partagent un trésor constitué de lingots d'or de la façon suivante :

- Le premier pirate prend un certain nombre de lingots (notons le **n**).
- Le deuxième pirate prend un lingot de plus que le premier pirate (notons sa quantité de lingots **m**).
- Le troisième pirate prend autant de lingots que les deux premiers réunis ! (notons ce nombre **p**)
- Quand on multiplie le nombre de lingots de chaque pirate (**n×m×p**), on obtient 84.

Combien chaque pirate a-t-il pris de lingots ?

………

………

………

………

………

………

………

Exercices supplémentaires

Exercice n°13 :

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de :

a) 32 par 5 : ……………………………………………………………………………………

b) 124 par 3 : ……………………………………………………………………………………

c) 5 par 4 : ……………………………………………………………………………………

Exercice n°14 :

Le quotient d'une division euclidienne est 14, son reste est 3 et son diviseur est 7. Quel est le dividende ?

……

……

Exercice n°15 :

Le quotient d'une division euclidienne est 36 et son diviseur est 8. Quels sont tous les restes et tous les dividendes possibles ?

……

……

……

……

……

Exercice n°16 :

Donner 5 multiples de :

a) 15 : ……

b) 12 : ……

c) 8 : ………

Exercice n°17 :

Écrire 3 phrases en utilisant les nombres 255 et 51, et les mots « diviseur », « multiple » et « divise » :

……

……

……

Exercice n°18 :

Déterminer la liste de tous les diviseurs de :

a) 34 : ……

b) 85 : ……

Quel est le plus grand diviseur commun de 34 et 85 ? ………………………………………………………

Exercice n°19 :

Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers :

96	165	168	196
60	63	64	66

Exercice n°20 :

Entoure les nombres premiers :

35 36 37 38 39

Exercice n°21 :

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre à 3 chiffres, sans le dévoiler, puis de recopier ce nombre à sa suite de manière à obtenir un nombre à 6 chiffres. Par exemple si le spectateur choisit 126, alors il obtient 126126. Le magicien demande alors au spectateur de diviser ce nombre à 6 chiffres par 7, puis de diviser le résultat par 11, et enfin par 13. Il annonce alors « Le résultat obtenu est le nombre à 3 chiffres du début ! »

Comment expliquer ce tour de magie ?

………
………
………
………
………
………
………
………

Exercice n°22 :

Simplifie les fractions suivantes :

a) $\frac{126}{72}$ =
b) $\frac{525}{405}$ =
c) $\frac{720}{3\ 150}$ =
d) $\frac{315}{60}$ =
e) $\frac{586}{42}$ =
f) $\frac{1\ 764}{448}$ =
g) $\frac{140}{224}$ =
h) $\frac{55}{150}$ =
i) $\frac{124}{80}$ =
j) $-\frac{52}{88}$ =

Exercice n°23 :

Trouver deux nombres qui sont des multiples de 13 et dont le produit vaut 4 056. Donner toutes les possibilités :

………
………
………
………
………
………
………
………
………

<u>Exercice n°24</u> : (D'après DNB Asie, 2015) :

À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons de baudruche qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons.

L'année suivante, les *mêmes* enfants se partagent les 598 ballons utilisés cette année-là. Il en reste alors 13.

Combien d'enfants, *au maximum*, étaient présents ?