Séquence 16 : Fonctions

À la fin de cette Séquence 16, je dois connaître…	Pour m'entraîner :
• Les définitions de : « image » et « antécédent ».	Cours partie A
• Connaître les définitions et propriétés des fonctions affines, linéaires et constantes.	Cours partie B

Partie	Je dois savoir faire…	Pour m'entraîner : ★	★★	★★★
A	• Retrouver l'image ou l'antécédent d'un nombre à l'aide d'un calcul, d'un tableau ou d'un graphique.	n°1, 2, 10, 11	n°3, 4	n°12, 13
A	• Résoudre un problème à l'aide d'une fonction.		n°5	n°14
B	• Reconnaître la nature d'une fonction f par l'expression de $f(x)$.	N°6, 15		
A+B	• Calculer l'image d'un nombre par une fonction f.	N°1, 2	n°3	n°12
B	• Calculer l'antécédent d'un nombre par une fonction f affine ou linéaire.		N°8	n°16
B	• Représenter graphiquement une fonction affine, linéaire ou constante.	N°7, 17		
B	• Lire graphiquement les coefficients d'une fonction affine.	n°9	n°18	

Remarque : Cette séquence est longue, et dense, car c'est en fait 2 séquences combinées… Mais je préfère qu'il ne vous manque rien ! N'hésitez pas à la retravailler pendant l'été pour être au top en 2^{nde} !

A) Notion de fonction

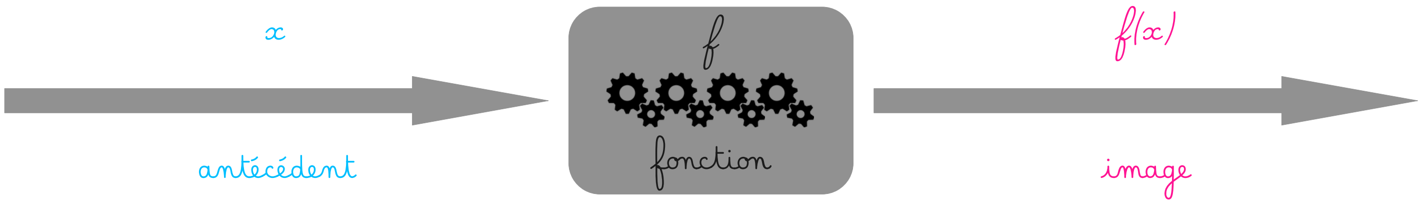
Les fonctions sont des objets mathématiques très importants. Elles servent à modéliser de nombreux phénomènes, qu'ils soient physiques, biologiques, technologiques ou économiques par exemple.

1. Définition

Définition : Une fonction f est un processus qui à un nombre x (appelé antécédent) associe un UNIQUE nombre $f(x)$ (« f de x » appelé image). On note :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

« La fonction f qui à x associe f de x »



Exemples :

- La fonction qui à un nombre associe son double est la fonction $f : x \longmapsto 2x$
  - Cette fonction associe 6 au nombre 3 : $f(3) = 2 \times 3 = 6$.
  - 3 est l'antécédent de 6 par la fonction f.
  - 6 est l'image de 3 par la fonction f.
  - On peut aussi noter : $f(x) = 2x$

- La fonction qui à un nombre associe la somme de son carré et de son double est la fonction

$$g : x \longmapsto x^2 + 2x$$

  - Cette fonction associe 24 au nombre 4 : $g(4) = 4^2 + 2\times 4 = 16 + 8 = 24$.
  - 4 est l'antécédent de 24 par la fonction g.
  - 24 est l'image de 4 par la fonction g.
  - On peut aussi noter : $g(x) = x^2 + 2x$
- Soit la fonction $h : x \longmapsto x^2$. Quels sont les antécédents de 0, 9 et -4 par h ?
  - L'antécédent de 0 est 0 : $h(0) = 0^2 = 0$
  - Les antécédents de 9 sont 3 et -3 : $h(3) = 3^2 = 9$ et $h(-3) = (-3)^2 = 9$
  - -4 n'a pas d'antécédent par h ! (en effet le carré d'un nombre est toujours positif !)

Remarque : Un nombre ne peut avoir qu'une seule image. Par contre, un nombre peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents !

2. Représentations

Une fonction est généralement définie par sa « formule » (comme dans les exemples ci-dessus), mais elle peut être représentée de diverses manières, qui aident à mieux la visualiser, la comprendre, à trouver l'image ou l'antécédent de certaines valeurs… Cela permet aussi de comparer les fonctions entre elles par exemple. Dans cette partie nous allons considérer la fonction f suivante :

$$f : x \longmapsto x^2 - 5$$

a) Le tableau

x	-6	-1	0	2	6	10
$f(x)$						

Quelle est est l'image de -6 ? de 2 ? → ……………………………………………………………

Donner un antécédent de -5 ? de 95 ? de 31 ? → ……………………………………………………………

b) Le graphique

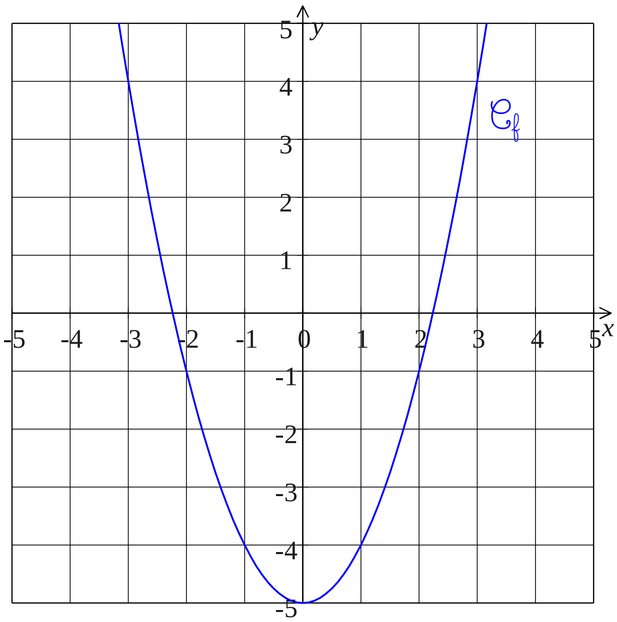
Définition : Dans un repère, la courbe représentative (ou représentation graphique) d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$. On note généralement cette courbe « $\mathcal{C}_f$ ».
Pour chaque point de la courbe, sur l'axe des abscisses on peut lire l'antécédent x et sur l'axe des ordonnées on peut lire l'image $f(x)$.

Donner graphiquement l'image de 2 ? de -3 ?

→ ……………………………………………………………

Donner graphiquement l'antécédent de -5 ?

→ ……………………………………………………………



B) Fonctions particulières

1. Fonctions affines

a) Définition

Définition : Une fonction affine est une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $f(x) = a\,x + b$
a et b sont des nombres relatifs donnés appelés les coefficients de la fonction f.

Exemples :

$f : x \longmapsto 3x + 6$ $\qquad g : x \longmapsto -5x + 9$ $\qquad h : x \longmapsto 2x - 3{,}5$

b) Représentation graphique associée

Propriété : Dans un repère, une fonction affine est représentée par une droite. Pour la tracer, il suffit donc de connaître 2 points de la courbe, et donc de calculer les images de 2 nombres choisis.

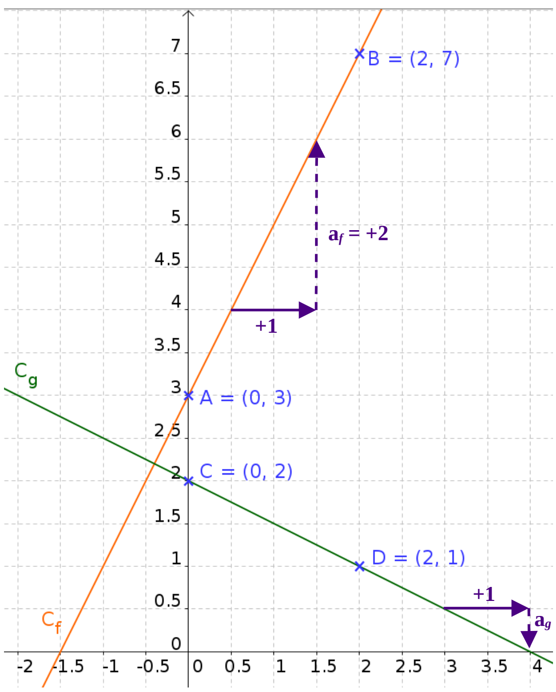
Exemple : Dans le repère ci-dessous, on veut tracer la représentation graphique des fonctions :

$f : x \longmapsto 2x + 3$ $\qquad g : x \longmapsto -0{,}5x + 2$

On commence par calculer les coordonnées de 2 points, par exemple en cherchant les images de 0 et de 2 :

$f(0) = 2\times0 + 3 = 0 + 3 = 3$
$f(2) = 2\times2 + 3 = 4 + 3 = 7$
La représentation graphique de f est donc une droite passant par les points A(0 ; 3) et B(2 ; 7).

$g(0) = -0{,}5\times0 + 2 = 0 + 2 = 2$
$g(2) = -0{,}5\times2 + 2 = -1 + 2 = 1$
La représentation graphique de g est donc une droite passant par les points C(0 ; 2) et D(2 ; 1).



Définition : Dans une fonction affine $f(x) = a\,x + b$, le coefficient a est appelé le coefficient directeur.

Il signifie que si l'on est sur la courbe et que l'on se déplace d'1 unité vers la droite, alors il faut "monter" de a unités "vers le haut" ("descendre" si a est négatif).

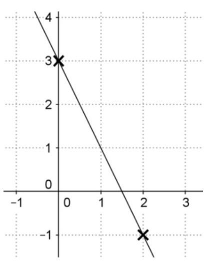
Exemples : $a = 2$ pour f ET $a = -0{,}5$ pour g.

Définition : Dans une fonction affine $f(x) = a\,x + b$, le coefficient b est appelé l'ordonnée à l'origine.

Il signifie que la droite coupe d'axe des ordonnées à la "hauteur" b.

Exemples : $b = 3$ pour f (voir l'ordonnée du point A) et $b = 2$ pour g (voir l'ordonnée du point C).

Exemple :



Lire sur la courbe les coefficients a et b et en déduire la fonction affine f correspondante :

→ Coefficient directeur a :
On "part" du point (0 ; 3) pour "arriver" au point (2 ; -1). On s'est donc déplacés d'1 unité vers la droite et on a "baissé" de 4 unités, donc ……………………………

→ Ordonnée à l'origine b :
La droite coupe l'axe des ordonnées au point (0 ; 3) donc ……………………………

→ Conclusion : $f(x) =$ ……………………………………………

2. Fonctions linéaires

a] Définition

Définition : Une fonction linéaire est une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $f(x) = a\,x$
a est un nombre relatif non nul donné appelé le coefficient de la fonction f

Remarque : une fonction linéaire est une fonction affine dont le second coefficient (b) est nul.

Exemples :

$f : x \longmapsto 5x$ $\qquad g : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x$ $\qquad h : x \longmapsto 9{,}2\,x$

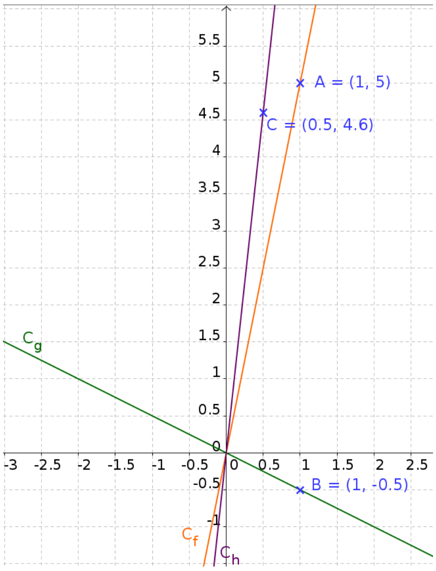
b] Représentation graphique associée

Propriété : Dans un repère, une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine. Pour la tracer, il suffit donc de connaître 1 point de la courbe, et donc de calculer l'image d'1 seul nombre différent de 0, puis de tracer la droite passant par ce point et par l'origine.

Remarque : Le coefficient a est également un coefficient directeur et se trouve de la même manière que pour une fonction affine.

Remarque importante : Une fonction linéaire traduit donc une situation de linéarité ! Et le coefficient directeur de la droite est tout simplement le coefficient de proportionnalité !

Exemple : Traçons ci-dessous les droites représentatives des fonctions données en exemple :



$f(1) = 5$
↳ $A(1\,;\,5)$

$g(1) = -0{,}5$
↳ $B(1\,;\,-0{,}5)$

$h(0{,}5) = 4{,}6$
↳ $C(0{,}5\,;\,4{,}6)$

3. Fonctions constantes

a] Définition

Définition : Une fonction constante est une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $f(x) = b$
b est un nombre relatif.

Remarque : L'image d'une fonction constante est constante (elle porte bien son nom...), c'est-à-dire que quel que soit l'antécédent x, le résultat $f(x)$ est toujours le même.

Remarque : Une fonction constante est une fonction affine dont le coefficient directeur (a) est nul.

Exemples : $\quad f : x \longmapsto -3$ $\qquad g : x \longmapsto \dfrac{7}{3}$ $\qquad h : x \longmapsto 0$

b] Représentation graphique associée

Propriété : Dans un repère, une fonction constante est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses, et coupant l'axe des ordonnées à la "hauteur" b. Il n'y a donc aucun calcul à effectuer pour tracer la droite représentative d'une fonction constante.

Remarque : Le coefficient b est également une ordonnée à l'origine, comme pour une fonction affine.

4. Calculer l'image d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

> Méthode : Pour calculer l'image d'un nombre par n'importe quelle fonction (affine, linéaire ou autre), il suffit de remplacer x par le nombre en question dans l'expression de la fonction.

Exemples : Calculer les images de 2 et de -5 par les fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto -3x$

$f(2) = -3 \times 2 = -6$

$f(-5) = -3 \times (-5) = 15$

$g : x \longmapsto 4x - 5$

$g(2) = 4 \times 2 - 5 = 8 - 5 = 3$

$g(-5) = 4 \times (-5) - 5 = -20 - 5 = -25$

5. Calculer l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

> Méthode : Pour trouver l'antécédent du nombre k par la fonction f, il faut résoudre l'équation $f(x) = k$.

Exemple : On cherche les antécédents de 3 par la fonction $f : x \longmapsto 2x - 5$.

Il faut donc résoudre l'équation :

$$f(x) = 3$$

$$2x - 5 = 3$$

$$2x - 5 + 5 = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$$2x \div 2 = 8 \div 2$$

$$x = 4$$

3 a donc un unique antécédent par la fonction f : 4

> Propriété : Tout nombre admet un unique antécédent par la fonction affine $f : x \longmapsto a\,x + b$.

S16 : Fonctions - Livret d'exercices

Exercices prioritaires

Exercice n°1 :

Une fonction *f* est telle que : $f(-3) = 4$. Traduire cette égalité par une phrase contenant…

a) … le mot « image » : ……………………………………………………………………………………………

b) … le mot « antécédent » : …………………………………………………………………………………………

Exercice n°2 :

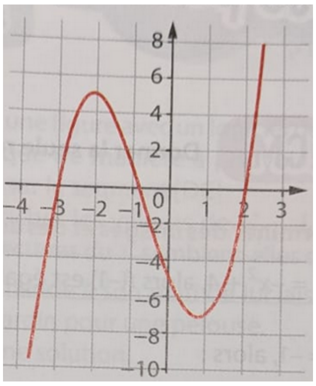
On donne $f(x) = 2x^2$. Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	-1	2	-2
f(x)				

Exercice n°3 :

→ Prendre un nombre *x*. → Le multiplier par 2. → Ajouter 5 au résultat. → On obtient *h(x)*.	On donne le programme de calcul ci-contre. 1) Exprimer *h(x)* en fonction de *x* : …………………………………………………………… 2) Quelle est l'image de $\frac{1}{3}$ par la fonction *h* ? …………………………………………………… 3) Donner le ou les antécédents de 9 par la fonction *h* : …………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………

Exercice n°4 :



Voici la courbe représentative d'une fonction *g* ci-contre.

Est-il vrai que g(-3) = g(2) ? Justifier.

……………………………………………………………………………………………

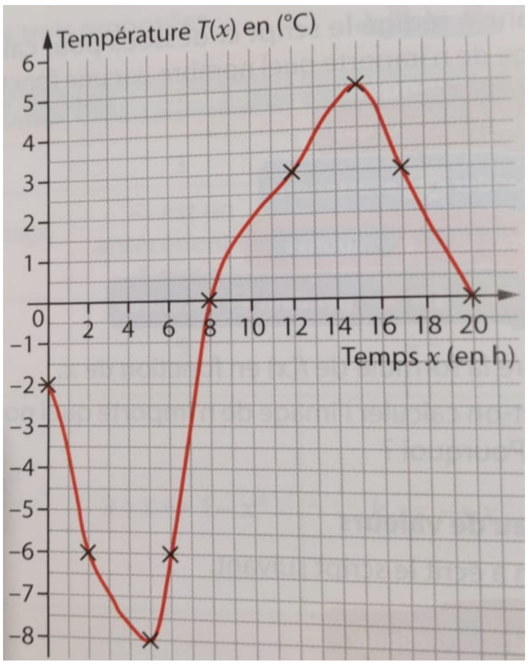
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Exercice n°5 :



À l'aide de sa station météo, Jessie a enregistré la température *T(x)* en fonction du temps *x* entre minuit et 20 heures le 9 février 2015. Elle est représentée ci-contre.

1) Quelle était la température à midi ce jour-là ? ……………………………………

2) Lire graphiquement *T(17)* : ……………………………………………………………
Que représente cette valeur ? ……………………………………………………………

3) Résoudre graphiquement l'équation *T(x)* = 0 : ……………………………………
Que représentent la ou les solutions trouvées ? ……………………………………

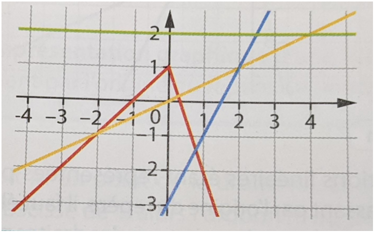
4) Donner l'image de 0 par la fonction *T* : ……………………………………………
Que représente cette valeur ? ……………………………………………………………

5) Donner le ou les antécédents de -6 par la fonction *T* : …………………………
Que représentent ces valeurs ? …………………………………………………………

7) Quand la température était-elle positive ce jour-là ? ……………………………
……………………………………………………………………………………………

Exercice n°6 :

Pour chaque fonction ci-dessous, coche si elle est affine, linéaire, constante ou aucun des 3 :

<table>
<tr><th colspan="2">Fonction</th><th>Affine ?</th><th>Linéaire ?</th><th>Constante ?</th><th>Autre ?</th></tr>
<tr><td colspan="2">$f(x) = 2 - x$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$g(x) = 2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$h(x) = 3x^2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$j(x) = 3(x - 2) + 6$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>bleue</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>verte</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>jaune</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>rouge</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exercice n°7 :

f est la fonction affine définie par $f : x \longmapsto 2x + 4$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$:

....

....

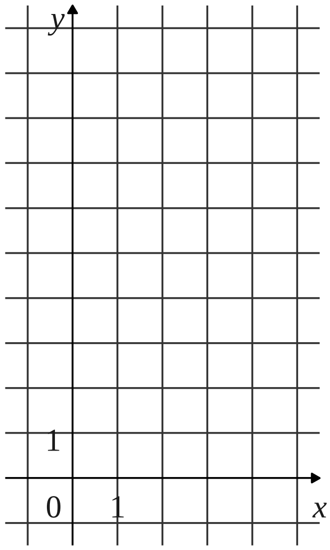
2) Dans le repère ci-contre, placer 2 points de la représentation graphique de *f* en utilisant les résultats de la question 1.

3) Tracer la représentation graphique de *f* et justifier :

....

....

....



Exercice n°8 :

1) *f* est la fonction affine définie par $f : x \longmapsto 2x - 1$. Déterminer les antécédents par *f*…

…de 5 :	…de 10 :	…de –4 :
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

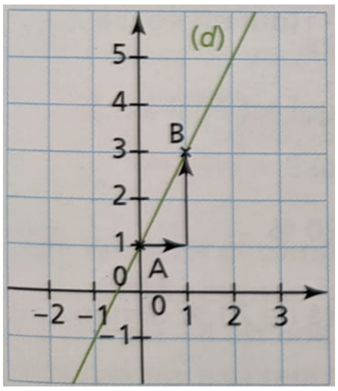
2) *g* est la fonction affine définie par $g : x \longmapsto -x + 7$. Déterminer les antécédents par *g*…

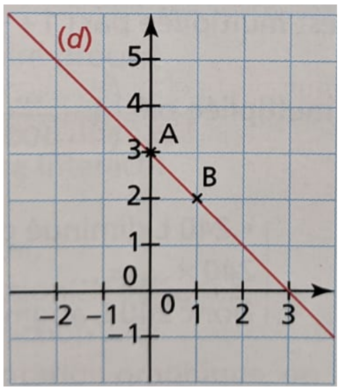
…de 2 :	…de 6 :	…de –5 :
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

Exercice n°9 :

(AB) est la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$.

Déterminer pour chaque cas le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b :





Exercices supplémentaires

Exercice n°10 :

Traduire les phrases suivantes par une égalité :

a) « L'image de 3 par la fonction f est -5. » : ……………………………………………

b) « -4 est un antécédent de 7 par la fonction g. » : ……………………………………………

Exercice n°11 :

Parmi les fonctions suivantes, entourer celle(s) qui, à un nombre x, associe son triple :

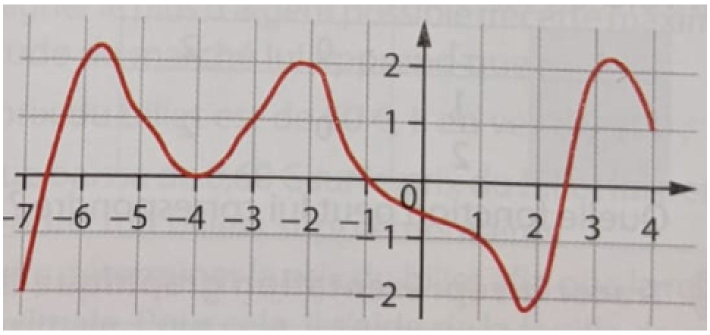
$f : x \longmapsto x + 3$	$g(x) = 4x - x$	$h : x \longmapsto 3x$
$j(x) = 3x^2$	$k(x) = 3x$	$l : x \longmapsto -3x$

Exercice n°12 :

→ Choisir un nombre. → Prendre son carré. → Ajouter 4 au résultat. → Prendre l'inverse du nombre obtenu.	On donne le programme de calcul ci-contre. 1) a. Quel nombre obtient-on si on choisit 1 comme nombre de départ ? …………………………………………… b. Quel nombre obtient-on si on choisit x comme nombre de départ ? …………………………………………… 2) En déduire la fonction g correspondant à ce programme de calcul. …………………………………………… 3) a. Donner l'image de 2 par la fonction g : …………………… b. Calculer g(-1) : …………………… c. 0 a-t-il un antécédent par g ? Pourquoi ? …………………… …………………………………………… ……………………………………………

Exercice n°13 :

Voici la courbe d'une fonction *f* ci-contre.
Déterminer graphiquement, quand c'est possible :



a) l'image de -1 : ……..	b) un antécédent de 2 : ………...
c) f(-6) = ………………	d) des antécédents de 1 : ………
e) un nombre qui a pour image 3 : ………………………	
f) un nombre qui a pour antécédent 2 : …………………	
g) une solution de l'équation f(x) = 0 : ………	

Exercice n°14 :

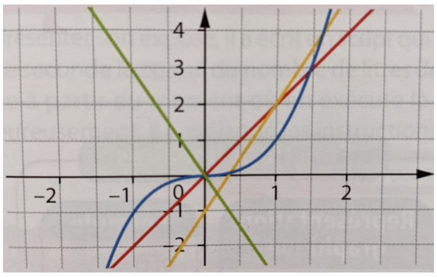
Un groupe de 100 personnes vont ensemble au restaurant. Elles ont le choix entre 2 formules : une à 20 € et l'autre à 25 €.

1) On appelle *x* le nombre de personnes choisissant le menu à 20 €. Exprimer le montant de l'addition *A(x)* en fonction de *x* : ………
……
……
……

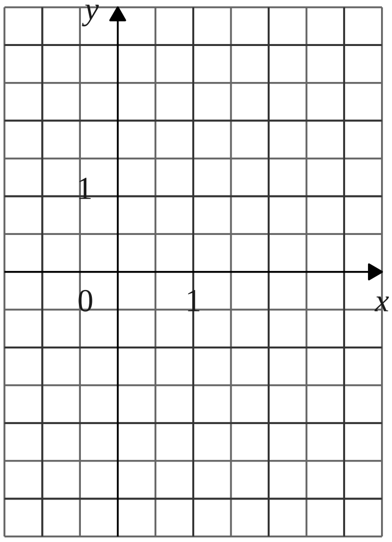
2) Le montant de l'addition est de 2 185 €. Combien de personnes ont choisi le menu à 20 € ?
……
……
……
……
……
……

Exercice n°15 :

Pour chaque fonction ci-dessous, coche si elle est affine, linéaire, constante ou aucun des 3 :

Fonction		Affine ?	Linéaire ?	Constante ?	Autre ?
f(x) = 6 – 3x					
g(x) = 4 + 7					
h(x) = 7(x +3)(x – 2)					
j(x) = 3,96x					
	bleue				
	verte				
	jaune				
	rouge				

Exercice n°16 :



g est la fonction affine définie par $g : x \longmapsto 0{,}5x - 1$.

1) Calculer $g(0)$ et $g(2)$:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2) Dans le repère ci-contre, placer 2 points de la représentation graphique de g en utilisant les résultats de la question 1.

3) Tracer la représentation graphique de g et justifier :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Exercice n°17 :

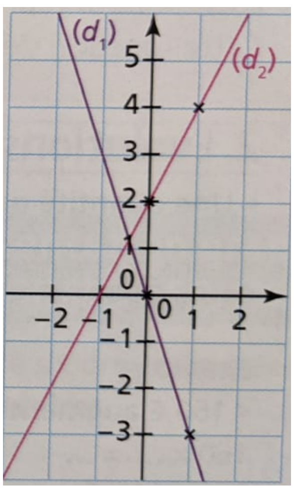
1) f est la fonction affine définie par $f : x \longmapsto -7x - 1$. Déterminer les antécédents par f…

…de 5 :	…de 0 :	…de $-\frac{1}{3}$:
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………

2) g est la fonction affine définie par $g : x \longmapsto -1{,}6x + 5{,}7$. Déterminer les antécédents par g…

…de 2 :	…de –11 :	…de 4 :
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………
…………………………	…………………………	…………………………

Exercice n°18 :



(d_1) et (d_2) sont des droites. Trouver en justifiant l'expression de la fonction représentée…

a) par la droite (d_1) :	b) par la droite (d_2) :
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………