Séquence 5 : Triangles superposables et semblables

OBJECTIFS :

À la fin de cette Séquence 5, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
La définition et les propriétés des triangles superposables.	Cours partie A
Les **deux caractérisations** des triangles semblables.	Cours partie B
La définition d'un facteur d'agrandissement ou de réduction.	Cours partie C

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner :		
	☆	☆☆	☆☆☆
Montrer que deux triangles sont superposables.	n°1	n°2	n°3
Trouver une longueur manquante dans des triangles semblables **grâce à leurs angles**.	n°4, 5	n°6	n°7
Trouver un angle manquant dans des triangles semblables **grâce à leurs longueurs**.	n°8		
Calculer et utiliser un facteur d'agrandissement/de réduction.	n°9	n°10	
Exercice type Brevet.			n°11

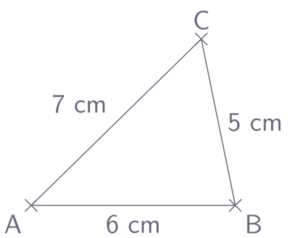
A) Triangles superposables

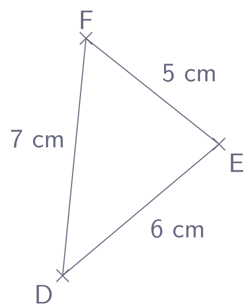
1. Définition et exemple

Définition 1 : Triangles superposables

Deux triangles sont dits *superposables*, ou *égaux*, si leurs côtés respectifs sont égaux.

Exemple(s) :

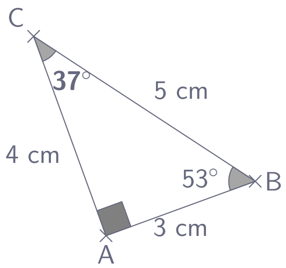


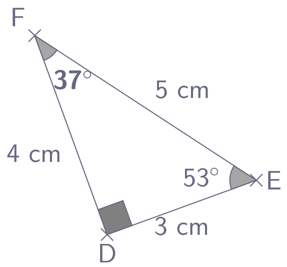


Les deux triangles ci-dessus ont les mêmes longueurs deux à deux ($AB = DE = 6$ cm ; $BC = EF = 5$ cm ; $AC = DF = 7$ cm), **ABC et DEF sont donc des triangles superposables (ou égaux)**.

2. Propriétés

Exemple(s) :





1) Calcule les aires des triangles ABC et DEF :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_{DEF} = \frac{DE \times DF}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

2) Calcule les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$:

La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180° :

$$\widehat{ACB} = \widehat{DFE} = 180° - (90° + 53°) = 37°$$

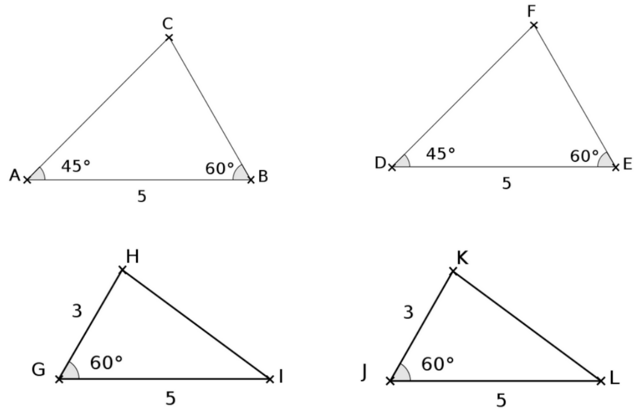
Propriété 1 :
Deux triangles superposables ont :

- la même aire.
- les mêmes angles.

Propriété 2 :
Deux triangles superposables s'ils ont :

- un **angle égal** entre **deux côtés égaux**.
- un **côté égal** entre **deux angles égaux**.

Exemple(s) :



Dans le schéma ci-contre :

- les triangles ABC et DEF sont superposables car $AB = DE$ et les angles qui entourent ces côtés sont égaux (45° et 60°).
- les triangles GHI et JKL sont superposables car $\widehat{IGH} = \widehat{LJK}$ et les côtés qui entourent ces angles sont égaux (5 et 3).

B) Triangles semblables

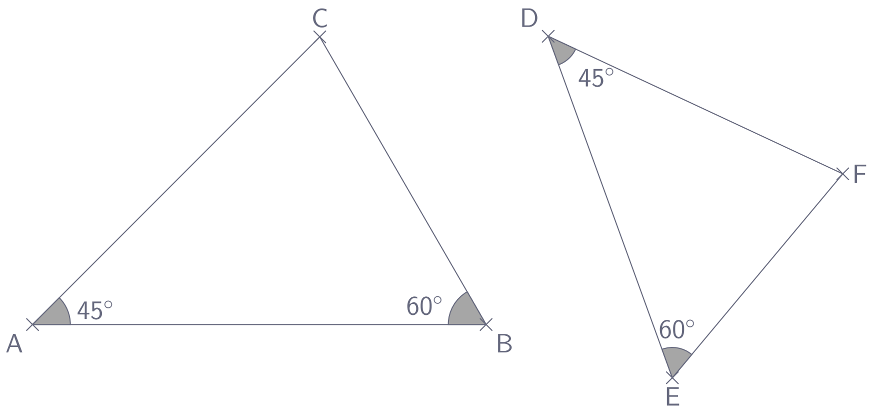
1. Caractérisations

Définition 2 : Caractérisation *par les angles*

Deux triangles sont semblables si leurs angles sont **deux à deux égaux**.

Remarque : Il suffit que 2 des angles soient égaux ! En effet, comme dans un triangle, la somme des angles est toujours égale à 180°, si deux triangles ont 2 angles identiques, alors le troisième angle est également identique.

Exemple(s) :



Triangle ABC	Triangle DEF
$\widehat{BAC} = 45°$	$\widehat{EDF} = 45°$
$\widehat{ABC} = 60°$	$\widehat{DEF} = 60°$
$\widehat{ACB} = 75°$	$\widehat{DFE} = 75°$

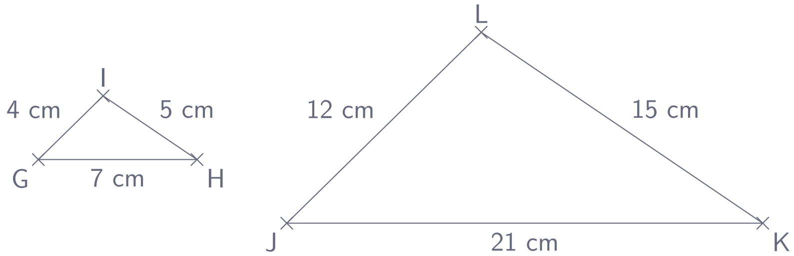
En effet :
$\widehat{ACB} = \widehat{DFE} = 180 - (45 + 60) = 75°$

Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux deux à deux, ce sont donc des triangles semblables.

Définition 3 : Caractérisation *par les longueurs*

Deux triangles sont semblables si leurs longueurs sont **deux à deux proportionnelles**.

Exemple(s) :



Triangle GHI	GH = 7	HI = 5	IG = 4
Triangle JKL	JK = 21	KL = 15	JL = 12

$$\frac{21}{7} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4} = 3$$

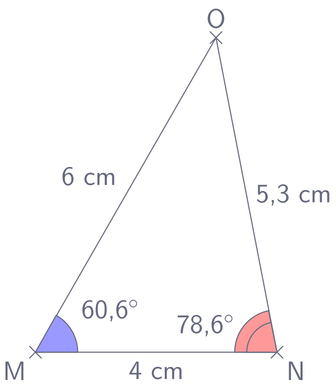
C'est bien un **tableau de proportionnalité** (de coefficient 3) donc les triangles GHI et JKL sont semblables.

2. Utiliser les triangles semblables pour démontrer

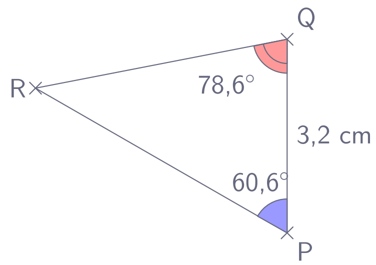
a. Trouver une longueur manquante dans des triangles semblables *grâce à leurs angles.*

Dans le cas où les angles sont connus et que l'on cherche l'une des longueurs, on utilise la **définition 2** pour démontrer que les triangles sont semblables, puis la **définition 3** pour dire que les longueurs sont proportionnelles et ainsi calculer la longueur manquante.

Exemple(s) :



Calculer les longueurs RQ et RP dans le triangle ci-dessous :



Méthode 1 :

1) Montrer que les triangles sont semblables :

Les triangles MNO et PQR ont deux angles communs :

$$\widehat{NMO} = \widehat{QPR} = 60,6^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{MNO} = \widehat{PQR} = 78,6^\circ$$

Comme la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°, les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{PRQ}$ sont également égaux. Les triangles MNO et PQR ont leurs angles deux à deux égaux, ils sont donc semblables.

2) En déduire la (ou les) longueur(s) manquante(s) :

On sait que si deux triangles sont semblables, alors leurs longueurs sont proportionnelles deux à deux. Il faut donc construire un tableau de proportionnalité :

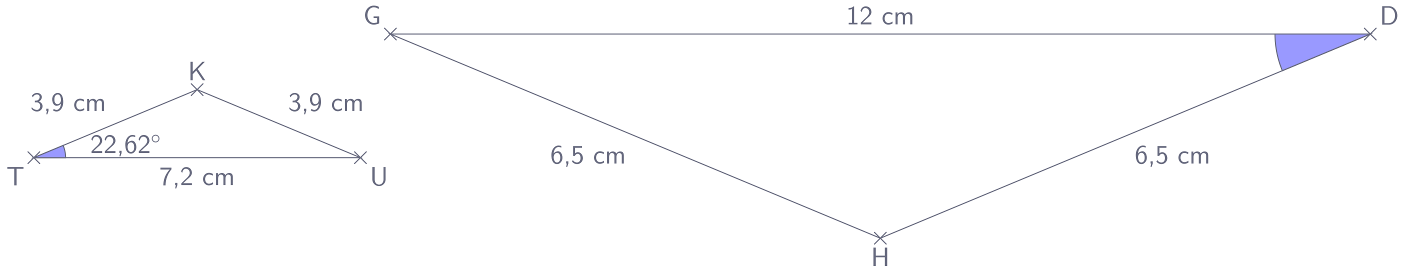
Angle « en face »	$\widehat{MON} = \widehat{PRQ}$	$\widehat{MNO} = \widehat{PQR}$	$\widehat{NMO} = \widehat{QPR}$
Triangle MNO	4 cm	6 cm	5,3 cm
Triangle PQR	3,2 cm $= 4 \times \mathbf{0,8}$	$6 \times 0,8 = \mathbf{4,8}$ cm	$5,3 \times 0,8 = \mathbf{4,24}$ cm

b. Trouver un angle manquant dans des triangles semblables *grâce à leurs longueurs.*

Dans le cas où les angles sont connus et que l'on cherche l'une des longueurs, on utilise la **définition 3** pour démontrer que les triangles sont semblables, puis la **définition 2** pour dire que les angles sont égaux et ainsi en déduire l'angle manquant.

☞ **Exemple(s) :**

Trouver l'angle $\widehat{GDH}$ dans le triangle ci-dessous :



Méthode 2 :

1) Montrer que les triangles sont semblables :

Triangle TUK	7,2 cm	3,9 cm	3,9 cm
Triangle DGH	12 cm	6,5 cm	6,5 cm

$$\frac{7,2}{12} = \mathbf{0,6} \quad \text{et} \quad \frac{3,9}{6,5} = \mathbf{0,6}$$

Il s'agit bien d'un tableau de proportionnalité, donc les triangles TUK et DGH sont semblables.

2) En déduire l'angle manquant :

On sait que si deux triangles sont semblables, alors leurs angles sont deux à deux égaux. On a donc :

$$\widehat{GDH} = \widehat{UTK} = \mathbf{22,62}^\circ$$

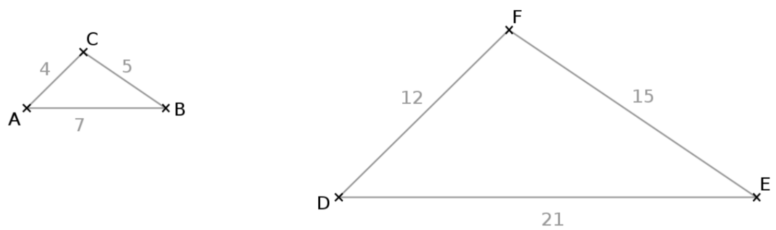
C) Facteur d'agrandissement/de réduction

Définition 4 : Facteur d'agrandissement/de réduction

Lorsque deux triangles sont semblables, le coefficient de proportionnalité du tableau associé est appelé :

- ☞ Facteur d'**agrandissement** s'il est > 1.
- ☞ Facteur de **réduction** s'il est < 1.

☞ **Exemple(s) :**



Triangle ABC	AB = 7	AC = 4	BC = 5
Triangle DEF	DE = 21	DF = 12	EF = 15

$\times 3$ $\div 3$

On peut donc dire que :

- ☞ Le triangle DEF est un **agrandissement** du triangle ABC de facteur **3**.
- ☞ Le triangle ABC est une **réduction** du triangle DEF de facteur $\mathbf{\frac{1}{3}}$.