Séquence 11 : Équations

✐ ✎ ✐ **OBJECTIFS** : ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 11, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Le vocabulaire des équations	Cours partie A

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Utiliser correctement le vocabulaire des équations.	n°1	n°2	
Résoudre une équation « directe »	n°3, 4, 5, 6	n°7, 8	n°9
Utiliser la distributivité pour résoudre une équation		n°10	
Résoudre une équation produit	n°11	n°12	
Appliquer les équations à la résolution de problèmes		n°13, 14	n°15, 16

A) Vocabulaire et notions de base

Définition 1 : Vocabulaire des équations

- Équation : c'est une égalité comportant au moins un nombre dont la valeur n'est pas connue.
- Inconnue : c'est le nombre que l'on cherche, désigné par une lettre (souvent x).
- Solution : c'est la valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie.
- Résoudre une équation : c'est trouver la (ou les) solution(s) de l'équation.

Remarque : une équation peut avoir plusieurs solutions, ou aucune !

Exemple(s) :

- « $x+1=3$ » est une équation avec **une seule inconnue** (x) et **une seule solution** qui est évidente : $x=2$, car $2+1=3$.
- « $y^2=4$ » est une équation avec **une seule inconnue** (y) mais avec **2 solutions !** En effet, $(-2)^2=4$ ET $2^2=4$

Méthode 1 : Principes généraux de résolution d'une équation

1. Une équation peut être considérée comme **une balance équilibrée** et qui doit **rester équilibrée** : si j'enlève 3 à un membre de l'équation, je dois enlever 3 aussi à l'autre. Si je divise un membre de l'équation par $2,5$, je dois aussi diviser l'autre membre de l'équation par $2,5$...
2. Pour résoudre une équation, on cherche à modifier son écriture (sans déséquilibrer la balance !) pour avoir **uniquement l'inconnue dans un membre de l'équation**, et **uniquement des constantes dans l'autre membre**.

B) Résoudre une équation

1. Équations « directes »

Propriété 1 : Addition et soustraction

Une égalité reste vraie si on **ajoute** ou **soustrait** un **même nombre** à chacun de ses membres :

$$\text{Si } A=B\text{, alors : } \begin{cases} A+k=B+k \\ A-k=B-k \end{cases}$$

Exemple(s) :

$x+3=7$ $x+3-3=7-3$ $\mathbf{x=4}$	$x-5=12$ $x-5+5=12+5$ $\mathbf{x=17}$	$x+9=2$ $x+9-9=2-9$ $\mathbf{x=-7}$	$x-8=-11$ $x-8+8=-11+8$ $\mathbf{x=-3}$	$2x-8=x-4$ $2x-8+8=x-4+8$ $2x=x+4$ $2x-x+x=x-4+x$ $\mathbf{x=4}$

Propriété 2 : Addition et soustraction

Une égalité reste vraie si on **multiplie** ou **divise** chacun de ses membres par un **même nombre** (différent de 0 !) :

$$\text{Si } A=B \text{ et } k\neq 0, \text{ alors : } \begin{cases} A\times k = B\times k \\ A\div k = B\div k \end{cases}$$

Exemple(s) :

$x\div 3=7$ $x\div 3\times 3=7\times 3$ $\mathbf{x=21}$	$x\times 5=15$ $x\times 5\div 5=15\div 5$ $\mathbf{x=3}$	$\frac{x}{2}=-3$ $\frac{x}{2}\times 2=-3\times 2$ $\mathbf{x=-6}$	$6x=42$ $6x\div 6=42\div 6$ $\mathbf{x=7}$

Méthode 2 : Résolution des équations « directes »

Pour la plupart des équations, il suffit d'utiliser les deux propriétés ci-dessus, éventuellement plusieurs fois, jusqu'à **isoler la variable** dans un membre de l'égalité, et les constantes dans l'autre.

Pour savoir dans quel ordre effectuer les opérations, il faut **regarder les priorités opératoires** et les *dépiler*.

Exemple(s) :

$3x+4=10$ $3x+4-4=10-4$ $3x=6$ $3x\div 3=6\div 3$ $\mathbf{x=2}$	$5y-3=17$ $5y-3+3=17+3$ $5y=20$ $5y\div 5=20\div 5$ $\mathbf{y=4}$
$7+\frac{x}{3}=9$ $7+\frac{x}{3}-7=9-7$ $\frac{x}{3}=2$ $\frac{x}{3}\times 3=2\times 3$ $\mathbf{x=6}$	$\frac{2x-5}{4}=1{,}5$ $\frac{2x-5}{4}\times 4=1{,}5\times 4$ $2x-5=6$ $2x-5+5=6+5$ $2x=11$ $\mathbf{x}=11\div 2=\mathbf{5{,}5}$

2. Utiliser la distributivité pour résoudre une équation

Pour certaines équations, il peut être pertinent de d'abord utiliser la distributivité et de les simplifier, afin de se ramener aux cas vu ci-dessus.

Exemple(s) :

$4(y+6)=36$	$7+x=3(3x-11)$	$3(2x+5)-7=2(x+6)$
1) On développe et on simplifie : $4\times y+4\times 6=36$; $4y+24=36$	1) On développe et on simplifie : $7+x=3\times 3x-3\times 11$; $7+x=9x-33$	1) On développe et on simplifie : $3\times 2x+3\times 5-7=2\times x+2\times 6$; $6x+15-7=2x+12$; $6x+8=2x+12$
2) On résoud : $4y+24-24=36-24$; $4y=12$; $4y\div 4=12\div 4$; $\mathbf{y=3}$	2) On résoud : $7+x-7=9x-33-7$; $x=9x-40$; $x-9x=9x-40-9x$; $-8x=-40$; $-8x\div(-8)=-40\div(-8)$; $\mathbf{x=5}$	2) On résoud : $6x+8-8=2x+12-8$; $6x=2x+4$; $6x-2x=2x+4-2x$; $4x=4$; $4x\div 4=4\div 4$; $\mathbf{x=1}$

3. Équations produit

Propriété 3 : Si $a\times b=0$, alors $a=0$ ou $b=0$.

Ces équations ont **en général 2 solutions**. On note alors :

$$\mathcal{S}=\{\text{ensemble des solutions}\}$$

Exemple(s) :

$(x-2)(x+5)=0$	$(x+4)(2x-3)=0$
$x-2=0$; $x-2+2=0+2$; $\mathbf{x=2}$ | $x+5=0$; $x+5-5=0-5$; $\mathbf{x=-5}$	$x+4=0$; $x+4-4=0-4$; $\mathbf{x=-4}$ | $2x-3=0$; $2x-3+3=0+3$; $2x=3$; $2x\div 2=3\div 2$; $\mathbf{x=1,5}$
$\mathcal{S}=\{2;-5\}$	$\mathcal{S}=\{-4;1,5\}$

$$x^2=49$$

On peut écrire $x^2=7^2$ donc en appliquant le cas particulier vu dans la Séquence 8 sur la factorisation on a :

$$(x-7)(x+7)=0$$

Et donc $x=7$ ou $x=-7$ soit $\mathcal{S}=\{-7;7\}$