Séquence 9 : Proportionnalité

✐ ✎ ✐ **OBJECTIFS :** ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 9, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Les définitions de « proportionnel » et de « coefficient de proportionnalité ».	Cours partie A
Les différentes méthodes de calcul d'une quatrième proportionnelle.	Cours partie B
Les définitions d'« échelle » et de « pourcentage ».	Cours partie C

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Reconnaître une situation de proportionnalité.	n°1, 2, 3	n°4, 5	n°6
Calculer une quatrième proportionnelle.	n°7, 8, 9	n°10, 11, 12	n°13
Calculer et utiliser une échelle.	n°14, 15	n°16	n°17, 18
Appliquer un pourcentage.	n°19, 20	n°21, 22	n°23
Résoudre des problèmes impliquant la proportionnalité.	Voir tous les exercices		

A) Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition 1 : Proportionnalité

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si on passe de l'une à l'autre en **multipliant toujours par un même nombre**, appelé **coefficient de proportionnalité**.

☞ **Exemple(s) :**

Des *t-shirts* sont vendus à l'unité. Un *t-shirt* coûte 11 €.

1) Quelles sont les 2 grandeurs étudiées ?

Les deux grandeurs sont :

- ☞ Le **nombre de *t-shirts* achetés**.
- ☞ Le **prix à payer (en euros)**.

2) Sont-elles proportionnelles ?

Le **prix à payer** s'obtient en multipliant le **nombre de *t-shirts*** par 11. C'est donc bien une situation de proportionnalité de **coefficient de proportionnalité 11**.

☞ **Exemple(s) :**

**Maïa a mis 10 minutes pour faire ses deux exercices de français,
et 24 minutes pour faire ses quatre exercices d'anglais.**

1) Quelles sont les 2 grandeurs étudiées ?

Les deux grandeurs sont :

- ☞ Le **nombre d'exercices à faire**.
- ☞ Le **temps passé (en minutes)**.

2) Sont-elles proportionnelles ?

Maïa a besoin de **5 minutes** par exercice de français $(10 \div 2 = 5)$, et de **6 minutes** par exercice d'anglais $(24 \div 4 = 6)$.

On ne peut donc pas multiplier le **nombre d'exercices** toujours par le même nombre pour obtenir le **temps passé**. Ce n'est pas proportionnel.

B) Calculer une quatrième proportionnelle

Lorsque l'on est dans une situation de proportionnalité, on peut faire un **tableau de proportionnalité** (avec chacune des deux grandeurs dans une ligne). Si 3 cases de ce tableau sont remplies, on peut **calculer la 4ème valeur**.

Méthode 1 : Calculer le coefficient de proportionnalité

Dans un tableau de proportionnalité, le coefficient permet de **passer de la ligne du haut à celle du bas.**
Il s'obtient en choisissant une colonne remplie et en **divisant le nombre du bas par celui du haut** :

Exemple : Younès a téléchargé un film de 4 Go (gigaoctets) en 5 minutes. Combien de temps lui faudra-t-il pour télécharger une série entière de 10 Go ?

Taille du fichier (en Go)	4	10
Durée de téléchargement (en min)	5	$1,25 \times 10 = \mathbf{12,5}$

$\times \mathbf{1,25}$

1) Calcule le coefficient de proportionnalité (à l'aide de la première colonne) :

$$5 \div 4 = \mathbf{1,25}$$

2) Complète le tableau à l'aide du coefficient de proportionnalité, puis conclus :

Il lui faudra donc $12,5$ min, soit **12 min et 30 secondes** pour télécharger la série.

Méthode 2 : Passage par l'unité

On peut parfois passer par « Combien coûte/représente/vaut/...**1 unité** de telle grandeur ? » :

Exemple : En randonnée, Marianne marche toujours à la même vitesse. En 3 h, elle parcourt 12 km. Combien parcourt-elle en 5 heures ?

Temps de marche (en h)	3	$3 \div 3 = \mathbf{1}$	$1 \times 5 = \mathbf{5}$
Distance parcourue (en km)	12	$12 \div 3 = \mathbf{4}$	$4 \times 5 = \mathbf{20}$

Si Marianne parcourt 12 km en 3 h :

- En **1 h**, elle parcourt donc **3 fois moins de distance, soit** $12 \div 3 = \mathbf{4}$ **km.**
- Puis en **5 h**, elle parcourt donc **5 fois plus de distance, soit** $4 \times 5 = \mathbf{20}$ **km.**

Marianne parcourt donc **20 km** en 5 h.

Méthode 3 : Multiplier une colonne

Pour obtenir une nouvelle colonne dans le tableau, on peut **multiplier (ou diviser) les nombres d'une colonne par un même nombre.**

Exemple : Pour fabriquer 50 sacs, une usine a besoin de 40 m² de tissu. Combien lui faut-il de tissu pour fabriquer 150 sacs ?

$\times 3$

Nombre de sacs	50	$50 \times 3 = \mathbf{150}$
Surface de tissu (en m^2)	40	$40 \times 3 = \mathbf{120}$

$\times 3$

Il lui faut donc **120 m² de tissu pour fabriquer 150 sacs.**

C) Applications de la proportionnalité (échelles et pourcentages)

1. Échelles

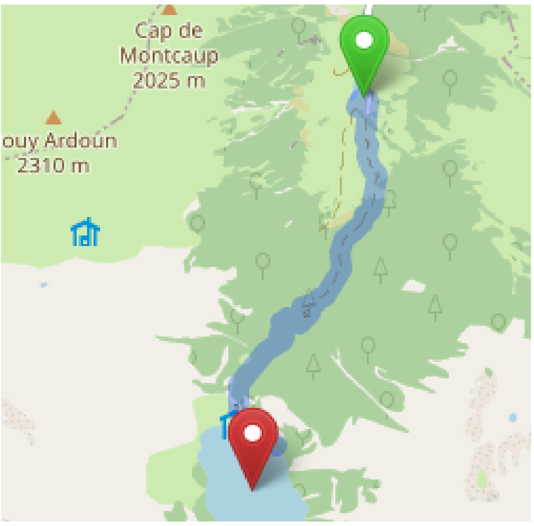
Définition 2 : Échelle

Pour dessiner une carte par exemple, ou au contraire représenter de très petits éléments, il faut effectuer une **réduction** ou un **agrandissement**. Pour ne pas déformer les distances, **les longueurs représentées doivent être proportionnelles aux longueurs réelles**. Le coefficient de proportionnalité est appelé **échelle** :

$$\text{Échelle} = \frac{\text{Longueur représentée}}{\text{Longueur réelle}} \quad \text{DANS LA MÊME UNITÉ !}$$

- Si l'échelle représentée est **inférieure à 1**, alors c'est **une réduction.**
- Si l'échelle représentée est **supérieure à 1**, alors c'est **un agrandissement.**

Exemple(s) :



Le plan ci-contre est à l'échelle $\frac{1}{72\ 000}$.

1) Qu'est-ce que cela signigie ?

Cela signifie que **1 cm sur le plan** représente **72 000 cm dans la réalité**.

2) On a représenté le chemin de randonnée entre les Granges d'Astau et le lac d'Oô (dans les Pyrénées). En considérant que la longueur du chemin sur la carte est d'environ **5 cm**, quelle est sa longueur réelle ?

On peut faire un tableau de proportionnalité :

Longueur sur le plan (en cm)	1	5
Longueur réelle (en cm)	72 000	?

$\times$ 72 000

La longueur réelle est donc de $5 \times 72\ 000 =$ **360 000 cm** $=$ **3,6 km**.

Exemple(s) :

Avec son microscope, Léa prend en photo un acarien à l'échelle $\frac{80}{1}$.

1) Qu'est-ce que cela signigie ?

Cela signifie que **80 mm sur la photo** représente **1 mm dans la réalité**.

2) Sur la photo, l'acarien mesure 24 mm. Combien mesure-t-il en réalité ?

On peut faire un tableau de proportionnalité :

$\times$ 80

Longueur sur la photo (en mm)	80	24
Longueur réelle (en mm)	1	?

$\div$ 80

La longueur réelle est donc de $24 \div 80 =$ **0,3 mm**.

Parmi les 2 exemples ci-dessus, lequel correspond à un agrandissement, et lequel à une réduction ?

- Dans le premier exemple, $\frac{1}{72\ 000} < 1$ donc **la carte est une réduction de la réalité**.
- Dans le second exemple, $\frac{80}{1} > 1$ donc **la photo est un agrandissement de la réalité**.

2. Pourcentages

Définition 3 : Pourcentage

Un pourcentage est une situation de proportionnalité dans laquelle **on ramène le total à 100**.

Exemple(s) :

Que signifient les pourcentages suivants ?

- 15 % : **15 pour un total de 100.**
- 73 % : **73 pour un total de 100.**
- 50 % : **50 pour un total de 100, soit la moitié (donc $50~\% = \frac{1}{2} = 0,5$).**
- 25 % : **25 pour un total de 100, soit le quart (donc $25~\% = \frac{1}{4}$).**
- 200 % : **200 pour un total de 100, soit le double.**

Exemple(s) :

La photographie ci-contre a été prise au détroit de Gibraltar, qui marque l'entrée de la Mer Méditerranée. Cette mer contient environ **4 % de sel**.

1) Qu'est-ce que cela signifie ?

Cela signifie qu'il y a **4 g de sel** dans **100 g d'eau de mer**, ou encore que la **masse de sel** et la **masse d'eau de mer** sont proportionnelles, avec un coefficient de $\frac{4}{100} = \mathbf{0,04}$.

2) Quelle masse de sel est contenue dans 680 g d'eau de mer ?

On peut faire un tableau de proportionnalité :

Masse de sel (en g)	4	?
Masse d'eau (en g)	100	680

$\div\, 0,04$ $\times\, 0,04$

La masse de sel dans 680 g d'eau de mer est donc de $680 \times 0,04 = \mathbf{27,2~g}$.