S14 : Fonctions linéaires, affines et constantes - **Livret d'exercices**

☞ Exercice 1 : ☆

Complète le tableau en identifiant les coefficients a et b des fonctions affines suivantes (en modifiant son expression si besoin) :

$f(x) = ax + b$	a	b
$f(x) = 5x + 12$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{12}$
$g(x) = x - 4 = \mathbf{1x - 4}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-4}$
$h(x) = 2(3x + 0,7) - 5 = \mathbf{6x + 1,4 - 5 = 6x - 3,6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{-3,6}$
$j(x) = \dfrac{5 - 6x}{3} = \mathbf{-2x + \dfrac{5}{3}}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{\dfrac{5}{3}}$
$k(x) = 5 = \mathbf{0x + 5}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{5}$

☞ Exercice 2 : ☆☆

Pour chaque fonction ci-dessous, coche si elle est affine, linéaire, constante ou aucun des 3 (en modifiant son expression si besoin) :

Fonction	Affine ?	Linéaire ?	Constante ?	Autre ?
$f(x) = 2 - x - \mathbf{1x + 2}$	✔			
$g(x) = 2$			✔	
$h(x) = 3x^2$				✔
$j(x) = 3(x - 2) + 6 = \mathbf{3x - 6 + 6 = 3x}$		✔		
$f(x) = 6 - 3x = \mathbf{-3x + 6}$	✔			
$g(x) = 4 + 7 = \mathbf{11}$			✔	
$h(x) = 7(x + 3)(x - 2) = \mathbf{7x^2 + 7x - 42}$				✔
$j(x) = 3,96x$		✔		

☞ Exercice 3 : ☆☆☆

1) Traduis chacun des programmes de calcul suivants par une fonction :

☞ Choisir un nombre ☞ Ajouter $3,5$ ☞ Mutiplier par le nombre initial	☞ Choisir un nombre ☞ Élever au carré ☞ Soustraire 5	☞ Choisir un nombre ☞ Ajouter 2 ☞ Multiplier par -5	☞ Choisir un nombre ☞ Diviser par 2 ☞ Ajouter $6,7$
$f(x) = \mathbf{x^2 + 3,5x}$	$g(x) = \mathbf{x^2 - 5}$	$h(x) = \mathbf{-5x - 10}$	$i(x) = \mathbf{\dfrac{x}{2} + 6,7}$

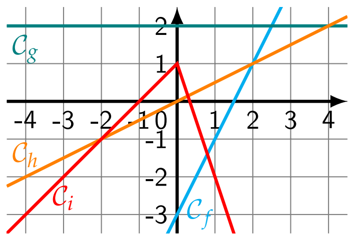
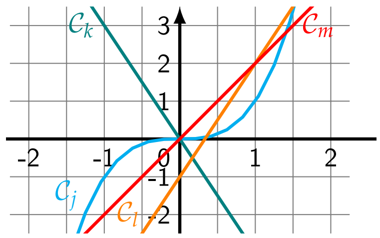
2) Lesquelles de ces fonctions sont affines ? Justifier.

$h(x) = ab + b$ avec $a = -5$ et $b = -10$ donc h est affine.

$i(x) = ab + b$ avec $a = 0,5$ et $b = 6,7$ donc i est affine.

Exercice 4 : ☆

Pour chaque fonction ci-dessous, coche si elle est affine, linéaire, constante ou aucun des 3 :

Fonction		Affine ?	Linéaire ?	Constante ?	Autre ?
	f	✔			
	g			✔	
	h		✔		
	i				✔
	j				✔
	k		✔		
	l	✔			
	m		✔		

Exercice 5 : ☆

f est la fonction affine définie par $f : x \mapsto 2x + 4$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$:

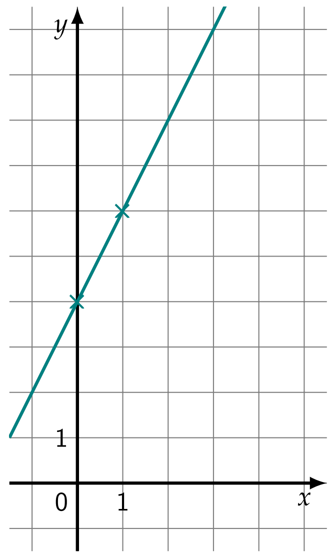
$f(0) = 2 \times 0 + 4 = \mathbf{4} \Rightarrow (0;4)$

$f(1) = 2 \times 1 + 4 = 2 + 4 = \mathbf{6} \Rightarrow (1;6)$

2) Dans le repère ci-contre, placer 2 points de la représentation graphique de f en utilisant les résultats de la question précédente.

3) Tracer la représentation graphique de f et justifier :

f est une fonction affine, sa représentation graphique est donc une droite. Il suffit donc de connaître 2 points de la droite.



Exercice 6 : ☆

g est la fonction affine définie par $g : x \mapsto 0,5x - 1$.

1) Calculer $g(0)$ et $g(2)$:

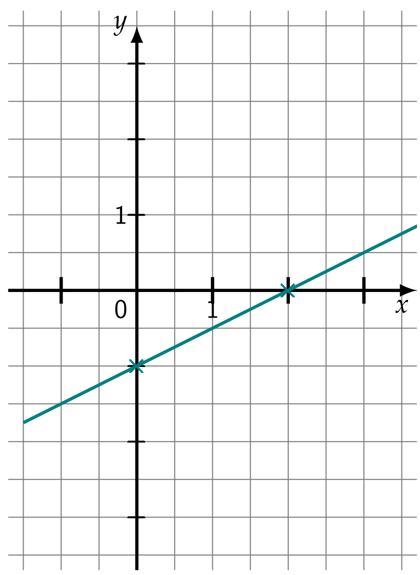
$g(0) = 0,5 \times 0 - 1 = \mathbf{-1} \Rightarrow (0;-1)$

$g(2) = 0,5 \times 2 - 1 = 1 - 1 = \mathbf{0} \Rightarrow (2;0)$

2) Dans le repère ci-contre, placer 2 points de la représentation graphique de g en utilisant les résultats de la question précédente.

3) Tracer la représentation graphique de g et justifier :

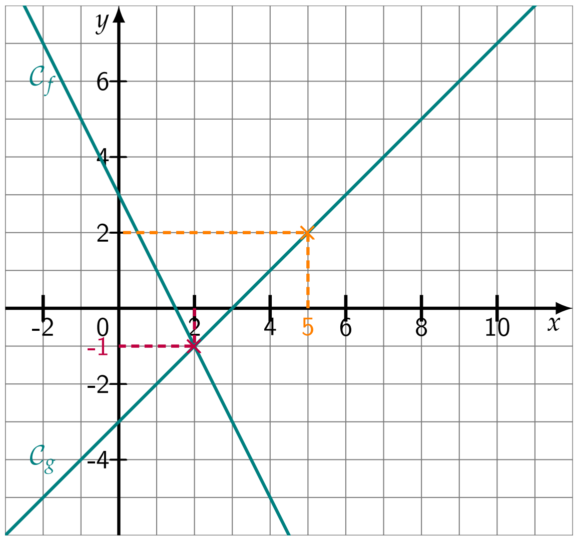
g est une fonction affine, sa représentation graphique est donc une droite. Il suffit donc de connaître 2 points de la droite.



Exercice 7 : ☆☆

1) Tracer dans le repère ci-contre les représentations graphiques des fonctions :

$$f : x \mapsto -2x+3 \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto x-3$$



2) Déterminer graphiquement la valeur de x qui a la même image par les deux fonctions. Quelle est cette image commune ?

Les deux droites se croisent au point $(2, -1)$. Ces deux fonctions ont donc la même image pour $x = 2$. Cette image est -1.

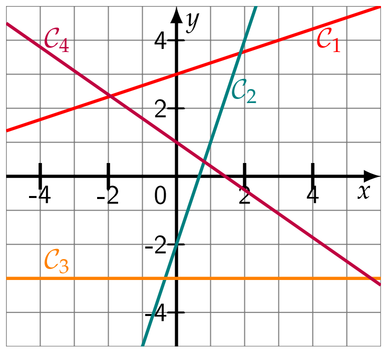
3) Déterminer graphiquement l'antécédent de 2 par la fonction g.

En partant de 2 sur l'axe des ordonnées, on lit 5 comme abscisse.

Donc l'antécédent de 2 par g est 5.

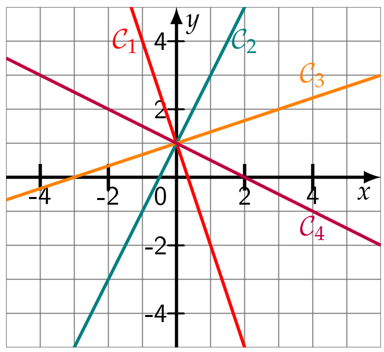
Exercice 8 : ☆

1) Associer chacune des fonctions suivantes avec sa représentation graphique à l'aide de l'ordonnée à l'origine :



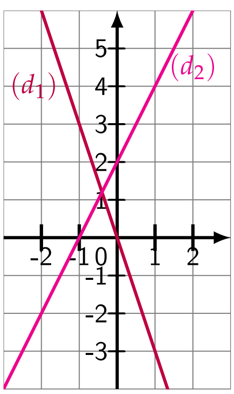
- $f : x \mapsto -0{,}7x+1$: $\mathcal{C}_4$
- $g : x \mapsto 3x-2$: $\mathcal{C}_2$
- $h : x \mapsto \frac{1}{3}x+3$: $\mathcal{C}_1$
- $k : x \mapsto -3$: $\mathcal{C}_3$

2) Associer chacune des fonctions suivantes avec sa représentation graphique à l'aide du coefficient directeur :



- $f : x \mapsto 2x+1$: $\mathcal{C}_2$
- $g : x \mapsto -3x+1$: $\mathcal{C}_1$
- $h : x \mapsto \frac{1}{3}x+1$: $\mathcal{C}_3$
- $k : x \mapsto -0.5x+1$: $\mathcal{C}_4$

Exercice 9 : ☆☆



(d_1) et (d_2) sont des droites. Trouver, **en justifiant**, l'expression de la fonction représentée...

1) ...par la droite (d_1) :

(d_1) est une droite **passant par l'origine**, elle représente donc une **fonction linéaire** de la forme $f(x) = ax$. Il suffit de chercher le **coefficient directeur** :

$$a = -3$$

$$\Longrightarrow \boxed{f : x \mapsto -3x}$$

2) ...par la droite (d_2) :

(d_2) est une droite, elle représente donc une **fonction affine** de la forme $g(x) = ax+b$.

Coefficient directeur :

$$a = +2$$

Ordonnée à l'origine :

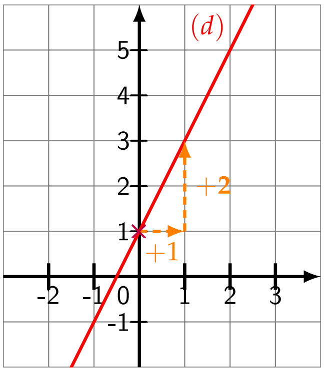
$$b = +2$$

$$\Longrightarrow \boxed{g : x \mapsto 2x+2}$$

Exercice 10 : ☆☆

(d) est la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

Déterminer pour chaque cas le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b, et en déduire l'expression de la fonction f :



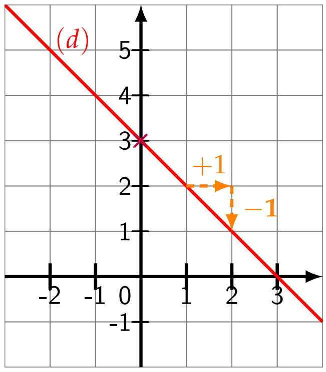
Coefficient directeur :

$$a = +2$$

Ordonnée à l'origine :

$$b = +1$$

$$\Longrightarrow \boxed{f : x \mapsto 2x + 1}$$



Coefficient directeur :

$$a = -1$$

Ordonnée à l'origine :

$$b = +3$$

$$\Longrightarrow \boxed{f : x \mapsto -x + 3}$$

Exercice 11 : ☆☆

1) f est la fonction définie par $f : x \mapsto 2x - 1$. Déterminer les antécédents par f...

a. ...de 5 :

$$2x - 1 = 5$$
$$2x - 1 + 1 = 5 + 1$$
$$2x = 6$$
$$2x \div 2 = 6 \div 2$$
$$\boxed{x = 3}$$

b. ...de 10 :

$$2x - 1 = 10$$
$$2x - 1 + 1 = 10 + 1$$
$$2x = 11$$
$$2x \div 2 = 11 \div 2$$
$$\boxed{x = 5,5}$$

c. ...de -4 :

$$2x - 1 = -4$$
$$2x - 1 + 1 = -4 + 1$$
$$2x = -3$$
$$2x \div 2 = -3 \div 2$$
$$\boxed{x = -1,5}$$

2) g est la fonction définie par $g : x \mapsto -x + 7$. Déterminer les antécédents par g...

a. ...de 2 :

$$-x + 7 = 2$$
$$-x + 7 - 7 = 2 - 7$$
$$-x = -5$$
$$-x \times (-1) = -5 \times (-1)$$
$$\boxed{x = 5}$$

b. ...de 6 :

$$-x + 7 = 6$$
$$-x + 7 - 7 = 6 - 7$$
$$-x = -1$$
$$-x \times (-1) = -1 \times (-1)$$
$$\boxed{x = 1}$$

c. ...de -5 :

$$-x + 7 = -5$$
$$-x + 7 - 7 = -5 - 7$$
$$-x = -12$$
$$-x \times (-1) = -12 \times (-1)$$
$$\boxed{x = 12}$$

Exercice 12 : ☆☆

1) f est la fonction définie par $f : x \mapsto -7x - 1$. Déterminer les antécédents par f...

a. ...de 5 :

$$-7x - 1 = 5$$
$$-7x - 1 + 1 = 5 + 1$$
$$-7x = 6$$
$$-7x \div (-7) = 6 \div (-7)$$
$$\boxed{x = -\frac{7}{6}}$$

b. ...de 0 :

$$-7x - 1 = 0$$
$$-7x - 1 + 1 = 0 + 1$$
$$-7x = 1$$
$$-7x \div (-7) = 1 \div (-7)$$
$$\boxed{x = -\frac{1}{6}}$$

c. ...de $-\frac{1}{3}$:

$$-7x - 1 = -\frac{1}{3}$$
$$-7x - 1 + 1 = -\frac{1}{3} + 1$$
$$-7x = \frac{2}{3}$$
$$-7x \div (-7) = \frac{2}{3} \div (-7)$$
$$\boxed{x = -\frac{2}{21}}$$

2) g est la fonction définie par $g : x \mapsto -1,6x + 5,7$. Déterminer les antécédents par g...

a. ...de 2 :

$$-1,6x + 5,7 = 2$$
$$-1,6x + 5,7 - 5,7 = 2 - 5,7$$
$$-1,6x = -3,7$$
$$-1,6x \div (-1,6) = -3,7 \div (-1,6)$$
$$\boxed{x = 2,3125}$$

b. ...de -11 :

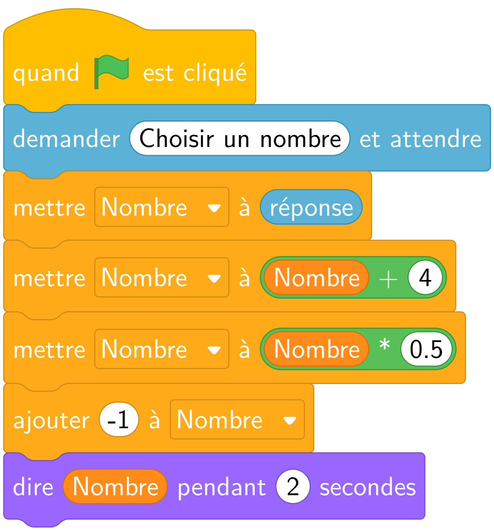
$$-1,6x + 5,7 = -11$$
$$-1,6x + 5,7 - 5,7 = -11 - 5,7$$
$$-1,6x = -16,7$$
$$-1,6x \div (-1,6) = -16,7 \div (-1,6)$$
$$\boxed{x = 10,4375}$$

c. ...de 4 :

$$-1,6x + 5,7 = 4$$
$$-1,6x + 5,7 - 5,7 = 4 - 5,7$$
$$-1,6x = -1,7$$
$$-1,6x \div (-1,6) = -1,7 \div (-1,6)$$
$$\boxed{x = 1,0625}$$

Exercice 13 : ☆☆

On donne le script suivant :



1) Qu'annonce le lutin si l'utilisateur saisit -5 ?

$(-5 + 4) \times 0,5 - 1 = -0,5 - 1 = \mathbf{-1,5}$

Le lutin annonce $-1,5$.

2) On appelle x le nombre choisi et f la fonction qui, à ce nombre, fait correspondre le résultat annoncé par le lutin. Exprimer $f(x)$ en fonction de x et donner la nature de la fonction f.

$f(x) = (x + 4) \times 0,5 - 1 = 0,5 \times x + 0,5 \times 4 - 1$
$\mathbf{f(x) = 0,5x + 1}$

f est une **fonction affine**.

3) Arnaud a obtenu 17. Quel nombre avait-il choisi au départ ?

On cherche x tel que $f(x) = 17$.

$0,5x + 1 = 17 \implies 0,5x = 17 - 1 = 16$
$\implies x = 16 \div 0,5 = \mathbf{32}$

Arnaud a choisi le nombre 32.

4) Quel nombre faudrait-il écrire dans l'avant-dernière ligne du script à la place de -1 pour que la fonction f soit linéaire ? Justifier.

Il faut écrire -2 à la place de -1.
Ainsi, on aurait $f(x) = 0,5x + 2 - 2 = \mathbf{0,5x}$.

☞ Exercice 14 : ☆☆☆

f est une fonction affine dont la représentation graphique (d) passe par les points $A(3;2)$ et $B(4;5)$.

1) Déterminer par le calcul le coefficient directeur a de la droite (d).

On remarque qu'il y a une différence de 1 entre les abscisses des points A et B, donc le coefficient directeur de la droite s'obtient directement en prenant **la différence des ordonnées** des points A et B :

$$a = 5 - 2 = \mathbf{3}$$

2) Déterminer par le calcul l'ordonnée à l'origine b de la droite (d), puis exprimer $f(x)$ en fonction de x.

On sait que f est une fonction affine. Son expression est donc de la forme $f(x) = 3x + b$.

On sait également que la droite passe par le point $A(3;2)$, donc on a forcément $f(3) = 2$ (*on aurait tout aussi bien pu utiliser le point* B), d'où :

$$3 \times 3 + b = 2 \quad \Longrightarrow \quad 9 + b = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{b = 2 - 9 = -1}$$

On a donc $\mathbf{f(x) = 3x - 7}$.

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses, puis avec l'axe des ordonnées.

<u>Intersection avec l'axe des abscisses</u> :

On cherche x tel que $f(x) = 0$, soit $3x - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x = 7 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{7}{2}}$.

La droite (d) coupe l'axe des abscisses au point $M\left(\dfrac{7}{3};0\right)$.

<u>Intersection avec l'axe des ordonnées</u> :

On cherche $f(0) = 3 \times 0 - 7 = 0 - 7 = -7$.

La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point $N\,(0;-7)$.

☞ Exercice 15 : ☆☆☆

On ressent davantage le froid quand le vent souffle. On peut alors calculer une « température ressentie » grâce à la formule suivante :

$$T(x) = 13,12 + 0,621\ 5x + (0,396\ 5x - 11,37) \times k$$

où x est la température réelle en °C et k est un coefficient qui dépend de la vitesse du vent.

1) Quand le vent est de 50 km/h, on a $k = 1,87$. Démontrer que la fonction T est affine.

$T(x) = 13,12 + 0,621\ 5x + (0,396\ 5x - 11,37) \times 1,87 = 13,12 + 0,621\ 5x + 0,741\ 455x - 21,261\ 9$

$T(x) = 1,362\ 955x - 8,141\ 9$

La fonction T est bien affine.

2) Quelle est la température réelle lorsque le vent souffle à 50 km/h et que la température ressentie est de 0°C ?

On cherche x tel que $T(x) = 0$:

$$1,362\ 955x - 8,141\ 9 = 0$$

$$1,362\ 955x - 8,141\ 9 + 8,141\ 9 = 0 + 8,141\ 9$$

$$1,362\ 955x = 8,141\ 9$$

$$1,362\ 955x \div 1,362\ 955 = 8,141\ 9 \div 1,362\ 955$$

$$\boxed{x \approx 6}$$

La température réelle est d'environ 6°C.