Séquence 15 : Arithmétique

✐ ✎ ✐ **OBJECTIFS :** ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 15, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Le vocabulaire et les critères de divisibilité.	Cours partie A
La définition d'un nombre premier et tous les nombres premiers inférieurs à 30.	Cours partie B
La définition d'une fraction irréductible.	Cours partie C

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Effectuer une division euclidienne.	n°1, 2, 3	n°4, 5	
Reconnaître les multiples et les diviseurs d'un nombre.	n°6, 7	n°8, 9	n°10
Reconnaître un nombre premier.	n°11	n°12	n°13
Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.	n°14, 15		n°16
Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.	n°17, 18	n°19	
Résoudre des problèmes relevant de l'arithmétique (dont type Brevet).		n°20	n°21, 22

L'**arithmétique** est le domaine des mathématiques qui étudie les **nombres entiers**, c'est-à-dire ceux « sans virgule ». C'est un domaine des mathématiques qui a notamment de nombreuses applications en cryptographie, en particulier grâce à l'étude de certains nombres particuliers appelés « nombres premiers ».

Remarque importante : Dans tout ce cours, a et b seront des nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

A) Divisibilité

1. Division euclidienne

❧ Définition 1 : Division euclidienne

Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver deux autres nombres **entiers positifs** q et r tels que :

$$\underbrace{a}_{\text{dividende}} = \underbrace{b}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{q}_{\text{quotient}} + \underbrace{r}_{\text{reste}} \quad \text{et} \quad r < b$$

☞ **Exemple(s) :**

Pose et effectue les divisions euclidiennes suivantes :

$361 \div 7$:

$$\begin{array}{rrrr|rr} & 3 & 6 & 1 & 7 & \\ \hline - & 3 & 5 & & 5 & 1 \\ & & 1 & 1 & & \\ - & & & 7 & & \\ & & & 4 & & \end{array}$$

$361 = 7 \times 51 + 4$

$4 < 7$

- ☞ dividende : **361**
- ☞ diviseur : **7**
- ☞ quotient : **51**
- ☞ reste : **4**

$35 \div 5$:

$$\begin{array}{rrr|r} & 3 & 5 & 5 \\ \hline - & 3 & 5 & 7 \\ & & 0 & \end{array}$$

$35 = 5 \times 7 + 0$

$0 < 5$

- ☞ dividende : **35**
- ☞ diviseur : **5**
- ☞ quotient : **7**
- ☞ reste : **0**

On dit que 35 est **divisible par** 5.

$9 \div 15$:

$$\begin{array}{rr|rr} & 9 & 1 & 5 \\ \hline - & 0 & 0 & \\ & 9 & & \end{array}$$

$9 = 15 \times 0 + 9$

$9 < 15$

- ☞ dividende : **9**
- ☞ diviseur : **15**
- ☞ quotient : **0**
- ☞ reste : **9**

2. Critères de divisibilité

Définition 2 : Divisibilité

Si le **reste** de la division euclidienne de a par b est nul $(= 0)$, on dit au choix que :

- b est **un diviseur de** a
- a est **divisible par** b
- a est **un multiple de** b

Cela revient à dire que b est « dans la table de » a.

Exemple(s) :

$5 \times 3 = 15$ donc on peut dire :

- 5 est un diviseur de 15
- 15 est divisible par 5
- 15 est un multiple de 5
- 3 est un diviseur de 15
- 15 est divisible par 3
- 15 est un multiple de 3

⚠ On ne peut PAS dire « 5 est divisible par 15 », ou « 15 est un diviseur de 3 », ou encore « 5 est un multiple de 15 ». ⚠

Propriété 1 : Critères de divisibilité

- Si un entier est **pair** (se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8), alors il est **divisible par 2** ;
- Si **la somme des chiffres** d'un nombre est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3** ;
- Si **le nombre formé par les deux derniers chiffres** d'un nombre est divisible par 4, alors il est **divisible par 4** ;
- Si un nombre **se termine par** 0 **ou** 5, alors il est **divisible par 5** ;
- Si **la somme des chiffres** d'un nombre est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9** ;
- Si un nombre **se termine par** 0, alors il est **divisible par 10** ;

Exemple(s) :

- Nombres divisibles par 2 : 2 ; 1<u>4</u> ; 9<u>6</u> ; 84<u>8</u> ; 79 65<u>0</u> ...
- Nombres divisibles par 3 : 9 ; $135(1+3+2=6=3\times2)$; $9\ 756(9+7+5+6=27=3\times9)$ ...
- Nombres divisibles par 4 : 5<u>04</u> ; 4<u>12</u>$(12=4\times3)$; 78 9<u>36</u>$(36=4\times9)$; 999 999 9<u>16</u>$(16=4\times4)$ ...
- Nombres divisibles par 5 : 1<u>5</u> ; 84<u>0</u> ; 96 55<u>5</u> ; 142 96<u>0</u> ; 23 12<u>5</u> ...
- Nombres divisibles par 9 : $135(1+3+5=9)$; $9\ 756(9+7+5+6=27=9\times3)$; $855(8+5+5=18=9\times2)$ ...
- Nombres divisibles par 10 : 4<u>0</u> ; 56<u>0</u> ; 80<u>0</u> ; 789 95<u>0</u> ; 6 00<u>0</u> ; 7 524 00<u>0</u> ...

B) Nombres premiers

1. Introduction : le crible d'Ératosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Dans la grille ci-contre :

1. Commence par barrer le 1
2. Entoure 2 puis barre **tous les multiples** de 2
3. Entoure le plus petit nombre non barré (c'est-à-dire 3) puis barre tous ses multiples
4. Répète l'étape 3 jusqu'à ce que tous les nombres de la grille soient barrés ou entourés.

Que peut-on dire des nombres entourés ?

2. Définition et exemples à connaître

Définition 3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un entier positif qui a **exactement** 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple(s) :

- 4 n'est pas premier : **il a 3 diviseurs : 1, 4 et 2 !**
- ⚠ 1 n'est pas un nombre premier ! Il n'a en effet qu'un seul diviseur : lui-même ⚠
- **Les 15 nombres premiers inférieurs à 50 sont à connaître PAR CŒUR :**

$$2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23\ ;\ 29\ ;\ 31\ ;\ 43\ ;\ 47$$

3. Décomposition en facteurs premiers

Propriété 2 : Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des faacteurs près) comme un **produit de nombres premiers**.

Méthode 1 : Décomposition en facteurs premiers

Pour décomposer un nombre N en produit de facteurs premiers, on commence par chercher le plus petit nombre premier qui divise N, et on effectue cette division autant de fois que c'est possible. Puis on recommence avec le nombre premier suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1.

Exemple(s) :

$\begin{array}{r\|l} \mathbf{126} & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{504} & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{2\ 530} & 2 \\ 1\ 265 & 5 \\ 253 & 11 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{728} & 2 \\ 364 & 2 \\ 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$	$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$	$2\ 530 = 2 \times 5 \times 11 \times 23$	$728 = 2^3 \times 7 \times 13$

C) Simplification de fractions

Définition 4 : Fraction irréductible

Une fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** si a et b ont pour UNIQUE diviseur commun 1.

Remarque : On dit que a et b sont « premiers entre eux » (voir exercice n°13 du livret).

Exemple(s) :

Les fractions suivantes sont irréductibles :

- $\frac{3}{7}$ car : diviseurs de 3 : { 1 ; 3 } et diviseurs de 7 : { 1 ; 7 }
- $\frac{15}{4}$ car : diviseurs de 15 : { 1 ; 3 ; 5 ; 15 } et diviseurs de 4 : { 1 ; 2 ; 4 }
- $\frac{22}{9}$ car : diviseurs de 22 : { 1 ; 2 ; 11 ; 22 } et diviseurs de 9 : { 1 ; 3 ; 9 }

Les fractions suivantes ne sont pas irréductibles :

- $\frac{6}{9}$ car 6 et 9 ont **3** comme diviseur commun autre que 1.
- $\frac{13}{26}$ car 13 et 26 ont **13** comme diviseur commun autre que 1.
- $\frac{63}{21}$ car 63 et 21 ont **3**, **7**, et **21** comme diviseurs communs autres que 1.

Propriété 3 : Rappel sur les fractions

On ne change pas une fraction en multipliant ou en divisant son numérateur par un même nombre (non nul) !

Méthode 2 : Simplifier une fraction

Pour simplifier une fraction, la méthode la plus simple est de déomposer son numérateur ET son dénominateur en facteurs premiers, puis de simplifier les facteurs identiques :

Exemple(s) :

Simplifions la fraction $\frac{204}{72}$. Pour cela on commence par décomposer 204 et 72 en facteurs premiers :

204 | 2 102 | 2 51 | 3 17 | 17 1 | Donc $204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$	72 | 2 36 | 2 18 | 2 9 | 3 3 | 2 1 | Donc $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

On peut ensuite simplifier la fraction :

$$\frac{204}{72} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 17}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3} = \frac{17}{2 \times 3} = \boxed{\frac{17}{6}}$$