S15 : Arithmétique - Livret d'exercices

Exercice 1 : ☆

Laquelle de ces égalités correspond à la division euclidienne de 647 par 12 ?

$647 = 11 \times 54 + 53$ — car le diviseur n'est pas 12

$647 = 12 \times 53 + 11$

$647 = 12 \times 52 + 23$ — car $23 > 12$

Exercice 2 : ☆

Sandra peut lire sur l'écran de sa calculatrice :

$85 \vdash 6$
$Q = 14 \qquad R = 1$

Traduire ce résultat par une égalité :

$$85 = 6 \times 14 + 1$$

Exercice 3 : ☆

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de :

1) 32 par 5 : $q = 6$ et $r = 2$ car $32 = 5 \times 6 + 2$

2) 124 par 3 : $q = 41$ et $r = 1$ car $124 = 3 \times 41 + 1$

3) 5 par 4 : $q = 1$ et $r = 1$ car $5 = 4 \times 1 + 1$

Exercice 4 : ☆☆

Rémy veut ranger 184 timbres dans un classeur pouvant contenir 36 timbres par page. Combien va-t-il utiliser de pages ?

$$\begin{array}{r|l} 184 & 36 \\ -180 & 5 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Il va utiliser **6 pages** (5 complètes et une ne contenant que 4 timbres).

Exercice 5 : ☆☆

Le quotient d'une division euclidienne est 14, son reste est 3 et son diviseur est 7. Quel est le dividende ?

Dividende $= 7 \times 14 + 3 = 101$ donc le dividende de cette division est **101**.

Exercice 6 : ☆

Vrai ou Faux ? Coche la bonne réponse :

- 36 est un multiple de 6. .... ☑ VRAI ❑ FAUX
- 6 est un diviseur de 49. .... ❑ VRAI ☑ FAUX
- 12 est un multiple de 24. .... ❑ VRAI ☑ FAUX
- 184 est divisible par 2. .... ☑ VRAI ❑ FAUX
- 250 est divisible par 5. .... ☑ VRAI ❑ FAUX
- 252 est divisible par 9. .... ☑ VRAI ❑ FAUX

☞ Exercice 7 : ☆

Écrire trois phrases en utilisant les nombres 255 et 51 (sachant que $255 = 5 \times 51$) avec les mots « diviseur », « multiple » et « divise » :

- ☞ 51 est un **diviseur** de 255.
- ☞ 255 est un **multiple** de 51.
- ☞ 51 **divise** 255.

☞ Exercice 8 : ☆☆

⚠ EXERCICE IMPORTANT, méthode à savoir ré-appliquer ! ⚠

Déterminer tous les **diviseurs** des nombres suivants :

- ☞ 128 : 1 et 128 , 2 et 64 , 4 et 32, 8 et 16.
- ☞ 56 : 1 et 56 , 2 et 28 , 4 et 14, 7 et 8.
- ☞ 78 : 1 et 78 , 2 et 39 , 3 et 26, 6 et 13.

☞ Exercice 9 : ☆☆

1) Déterminer la liste de tous les diviseurs de :

- ☞ 34 : 1 et 34 , 2 et 17 .
- ☞ 85 : 1 et 85 , 5 et 17 .

2) Quel est le **plus grand diviseur commun** de 34 et 85 ?

Il s'agit de **17**.

☞ Exercice 10 : ☆☆☆

1) Une plaque identique rectangulaire de dimensions 280 cm et 315 cm doit être découpée en carrés identiques, sans perte. Quelle est la dimension maximale possible des carrés ?

Diviseurs de 280 : 1 et 280 , 2 et 140 , 4 et 70, 5 et 56 7 et 40, 8 et 35, 10 et 28, 14 et 20 soit :

$$1 < 2 < 4 < 5 < 7 < 8 < 10 < 14 < 20 < 28 < 35 < 40 < 56 < 70 < 140 < 280$$

Diviseurs de 315 : 1 et 315 , 3 et 105 , 5 et 63, 7 et 45 9 et 35, 15 et 21 soit :

$$1 < 3 < 5 < 7 < 9 < 15 < 21 < 35 < 45 < 63 < 105 < 315$$

Le plus grand diviseur commun est 35. Les carrés seront donc de taille $\boxed{\textbf{35 cm sur 35 cm}}$.

2) Si on vend chaque carré ainsi découpé à 0,30 € la pièce, combien gagnera-t-on d'argent en tout ?

Pour des plaques carrées de côté 35 cm, on pourra donc découper $315 \div 35 = \mathbf{9}$ carrés dans la longueur et $280 \div 35 = \mathbf{8}$ carrés dans la largeur, soit un total de $9 \times 8 = \mathbf{72}$ carrés en tout. À 0,30 € la pièce, cela représente donc un gain total de $72 \times 0,30 = \boxed{\mathbf{21,60}\text{ €}}$.

☞ Exercice 11 : ☆

Entoure les nombres premiers :

$35 = 7 \times 5$ $36 = 9 \times 4$ 37 $38 = 2 \times 19$ $39 = 3 \times 13$

Exercice 12 : ☆☆

Vrai ou Faux ?

			Justification :
1) Tout nombre est diviseur de lui-même.	☑ VRAI	❑ FAUX	$k = k \times 1$ pour tout k donc k divise k.
2) 1 divise tout nombre entier.	☑ VRAI	❑ FAUX	$k = 1 \times k$ pour tout k donc 1 divise k.
3) Tout nombre impair est premier.	❑ VRAI	☑ FAUX	Par exemple 9 est impair mais pas premier ($9 = 3 \times 3$).
4) Tout nombre pair est premier.	❑ VRAI	☑ FAUX	Par exemple 4 est pair mais pas premier ($4 = 2 \times 2$).
5) **Il existe une infinité de nombres premiers.**	☑ VRAI	❑ FAUX	
6) Il y a toujours un écart de 2 entre deux nombres premiers.	❑ VRAI	☑ FAUX	Si on prend la liste des premiers nombres premiers c'est évident.

Exercice 13 : ☆☆☆

On dit que **deux nombres sont premiers entre eux** s'ils n'ont **que 1 comme diviseur commun**.

1) Trouver tous les diviseurs de 45 :

1 ; 45 ; 3 ; 15 ; 5 ; 9.

2) Trouver tous les diviseurs de 28 :

1 ; 28 ; 2 ; 14 ; 4 ; 7.

3) Les nombres 45 et 28 sont-ils premiers entre eux ?

45 et 28 ont 1 comme **unique** diviseur commun, donc **ils sont premiers entre eux**.

4) Peut-on trouver deux nombres **pairs** premiers entre eux ? Justifier.

Non, car par définitions les nombres pairs sont tous divisibles par 2, qu'ils ont donc forcément comme diviseur commun (et pas seulement 1).

5) Peut-on trouver deux nombres **impairs** premiers entre eux ? Justifier.

Oui, par exemple 3 et 5 !

Exercice 14 : ☆

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

$12 = 2^2 \times 3$ 12 | 2 6 | 2 3 | 3 1 |	$28 = 2^2 \times 7$ 28 | 2 14 | 2 7 | 7 1 |	$75 = 3 \times 5^2$ 75 | 3 25 | 5 5 | 5 1 |	$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 630 | 2 315 | 3 105 | 3 35 | 5 7 | 7 1 |	$5\,005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ 5 005 | 5 1 001 | 7 143 | 11 13 | 13 1 |

☞ Exercice 15 : ☆

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

$96 = 2^5 \times 3$	$168 = 2^3 \times 3 \times 7$	$196 = 2^2 \times 7^2$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$	$64 = 2^6$
$96 \mid 2$	$168 \mid 2$	$196 \mid 2$	$60 \mid 2$	$64 \mid 2$
$48 \mid 2$	$84 \mid 2$	$98 \mid 2$	$30 \mid 2$	$32 \mid 2$
$24 \mid 2$	$42 \mid 2$	$49 \mid 7$	$15 \mid 3$	$16 \mid 2$
$12 \mid 2$	$21 \mid 3$	$7 \mid 7$	$5 \mid 5$	$8 \mid 2$
$6 \mid 2$	$7 \mid 7$	$1 \mid$	$1 \mid$	$4 \mid 2$
$3 \mid 3$	$1 \mid$			$2 \mid 2$
$1 \mid$				$1 \mid$

☞ Exercice 16 : ☆☆☆

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre à 3 chiffres, sans le dévoiler, puis de recopier ce nombre à sa suite de manière à obtenir un nombre à 6 chiffres. Par exemple si le spectateur choisit 126, il obtient alors 126 126. Le magicien demande alors au spectateur de diviser ce nombre à 6 chiffres par 7, puis de diviser le résultat par 11, et enfin par 13. Il annonce alors : « Le résultat obtenu est le nombre à 3 chiffres du début ! »

Comment expliquer ce tour de magie ?

Notons N le nombre à 3 chiffres de départ. Transformer 126 en 126 126, cela revient à le multiplier par 1 001. Pour obtenir le nombre à 6 chiffres on prend donc $\boxed{N \times 1\,001}$. Décomposons 1 001 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 1\,001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$. Donc quand on fait les divisions, cela revient à effectuer le calcul suivant :

$$\frac{N \times 1\,001}{7 \times 11 \times 13} = \frac{N \times 7 \times 11 \times 13}{7 \times 11 \times 13} = N$$

Ce qui explique pourquoi on retombe forcément sur le nombre initial !

☞ Exercice 17 : ☆

Simplifie les fractions suivantes :

- ☞ $\dfrac{138}{105} = \dfrac{2 \times \cancel{3} \times 23}{\cancel{3} \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{46}{35}}$
- ☞ $\dfrac{144}{216} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$
- ☞ $\dfrac{192}{288} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{3}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$
- ☞ $\dfrac{245}{216} = \dfrac{5 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = \boxed{\dfrac{245}{216}}$
- ☞ $\dfrac{48}{175} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{5 \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{48}{175}}$
- ☞ $\dfrac{120}{450} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 5} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$
- ☞ $\dfrac{1\,925}{3\,185} = \dfrac{\cancel{5} \times 5 \times \cancel{7} \times 11}{\cancel{5} \times \cancel{7} \times 7 \times 13} = \boxed{\dfrac{55}{91}}$
- ☞ $\dfrac{504}{1\,050} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times 5 \times \cancel{7}} = \boxed{\dfrac{12}{25}}$

Exercice 18 : ☆

Simplifie les fractions suivantes :

- $\dfrac{2\ 604}{1\ 428} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times 31}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times 17} = \boxed{\dfrac{31}{17}}$
- $\dfrac{12}{25} = \dfrac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 5} = \boxed{\dfrac{12}{25}}$
- $\dfrac{126}{72} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 7}{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \boxed{\dfrac{7}{4}}$
- $\dfrac{525}{405} = \dfrac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 5 \times 7}{\cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{5}} = \boxed{\dfrac{35}{27}}$
- $\dfrac{720}{3\ 150} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{8}{35}}$
- $\dfrac{315}{60} = \dfrac{3 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 7}{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}} = \boxed{\dfrac{21}{4}}$
- $\dfrac{140}{224} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 5 \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{7}} = \boxed{\dfrac{5}{8}}$
- $\dfrac{55}{150} = \dfrac{\cancel{5} \times 11}{2 \times 3 \times 5 \times \cancel{5}} = \boxed{\dfrac{11}{30}}$
- $\dfrac{124}{80} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 31}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 5} = \boxed{\dfrac{31}{20}}$
- $-\dfrac{52}{88} = -\dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 13}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 11} = -\boxed{\dfrac{13}{22}}$

Exercice 19 : ☆☆

Dans le village *Solidarity*, 1 520 personnes ont fait un don de charité sur 1 710 habitants en tout, tandis que dans le village *Solidaritat*, 1 840 personnes ont fait un don parmi les 2 070 habitants.

1) Exprimer pour chacun de villages la *proportion* de personnes ayant effectué un don, sous forme d'une fraction, puis simplifier les deux fractions obtenues :

Solidarity : $\dfrac{1\ 520}{1\ 710} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{5} \times \cancel{19}}{\cancel{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{19}} = \boxed{\dfrac{8}{9}}$

Solidaritat : $\dfrac{1\ 840}{2\ 070} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{5} \times \cancel{23}}{\cancel{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{23}} = \boxed{\dfrac{8}{9}}$

2) Que peut-on en conclure sur la générosité des habitants de ces deux villages ?

On remarque que même si l'un des deux villages a plus donné que l'autre, quand on le rapporte au nombre d'habitants la proportion est la même. Les habitants des deux villages sont donc aussi généreux les uns que les autres.

Exercice 20 : ☆☆

Trouver toutes les paires de nombres dont le produit vaut 4 056 et qui sont tous deux des multiples de 13 :

Liste des diviseurs de 4 056 (les multiples de 13 sont entourés) :

1 et 4 056 ; 2 et 2 028 ; 3 et 1 352 ; 4 et 1 014 ; 6 et 676 ; 8 et 507

12 et 338 ; 13 et 312 ; 24 et 169 ; 26 et 156 ; 39 et 104 ; 52 et 78

Dans la liste ci-dessus, les multiples de 13 sont 13, puis tous les nombres à partir de 26 (compris). Il y a donc 4 paires de nombres possibles :

13 et 312 OU 26 et 156 OU 39 et 104 OU 52 et 78

☞ Exercice 21 : ☆☆☆

1) Écrire tous les diviseurs de 84 (il y en a 12 en tout !) :

$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84$

2) Trois pirates se partagent un trésor constitué de lingots d'or de la façon suivante :

- ☞ Le premier pirate prend un certain nombre de lingots (notons ce nombre n).
- ☞ Le deuxième pirate prend un lingot de plus que le premier pirate (notons sa quantité de lingots m).
- ☞ Le troisième pirate prend autant de lingots que les deux premiers réunis (notons ce nombre p) !
- ☞ Quand on multiplie le nombre de lingots de chaque pirate ($n \times m \times p$), on obtient 84.

Combien chaque pirate a-t-il pris de lingots ?

Résumons :

- ☞ Pirate 1 : n lingots
- ☞ Pirate 2 : $m = n + 1$ lingots
- ☞ Pirate 3 : $p = n + m = n + n + 1 = 2n + 1$ lingots

On cherche donc un triplet $(n; n+1; 2n+1)$ dans les diviseurs de 84 tels que leur produit fasse 84 !

Si on prend $n = 1$, alors $n + 1 = 2$ et $2n + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ mais $1 \times 2 \times 3 = 6 \neq 84$.

Si on prend $n = 2$, alors $n + 1 = 3$ et $2n + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$ mais 5 n'est pas un diviseur de 84.

Si on prend $\boxed{n = 3}$, alors $n + 1 = 4$ et $2n + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ et $\boxed{3 \times 4 \times 7 = 84}$.

Il faut donc que le premier pirate prenne 3 lingots, le deuxième pirate 4 lingots et le troisième pirate 7 lingots !

☞ Exercice 22 : ☆☆☆

D'après DNB Asie 2015

À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons de baudruche qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons. L'année suivante, les *mêmes* enfants se partagent équitablement les 598 ballons utilisés cette année-là. Il en reste alors 13.

Combien d'enfants, *au maximum*, étaient présents ?

À la première fête, il restait 37 ballons sur 397, il y a donc $397 - 37 = 360$ ballons qui ont été partagés. Le nombre d'enfants est donc un **diviseur de 360** :

$$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20 ; 24 ; 30 ; 36 ; 40 ; 45 ; 60 ; 72 ; 90 ; 120 ; 180 ; 360$$

À la seconde fête, il restait 13 ballons sur 598, il y a donc $598 - 13 = 585$ ballons qui ont été partagés. Le nombre d'enfants est donc un **diviseur de 585** :

$$1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 15 ; 39 ; 45 ; 65 ; 117 ; 195 ; 585$$

Le **plus grand diviseur commun** à 360 et 585 est 45.
Il y avait donc au maximum 45 enfants.