Séquence 2 : Calcul littéral (1) - Distributivité

✐ ✎ ✐ **OBJECTIFS :** ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 2, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Les définitions d'« expression littérale », de « variable » et les conventions d'écriture.	Cours partie A
Les définitions de « simplifier » et « développer ».	Cours partie A et B

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Simplifier et **réduire** une expression.	n°1, 2	n°3, 4	
Utiliser la **distributivité simple** pour développer.	n°5, 6, 7, 8	n°9	n°10
Utiliser la **double distributivité** pour développer.	n°11	n°12	
Traduire un programme de calcul par une expression littérale.			n°13
Résoudre des problèmes faisant appel au calcul littéral.			n°14, 15

A) Simplifier et réduire une expression

Définition 1 : Variable et expression littérale

☞ Une **variable** (ou **inconnue**) est une lettre qui permet de désigner un nombre inconnu.

☞ Une **expression littérale** est une expression mathématique comportant une ou plusieurs variables.

☞ **Exemple(s) :**

La formule de l'aire d'un rectangle $\mathcal{A} = l \times L$ comporte 2 variables : l (la largeur) et L (la longueur).

Propriété 1 : Simplifier

Dans une expression littérale, on peut supprimer le signe « $\times$ » lorsqu'il est placé devant ou derrière une lettre ou une parenthèse.

☞ **Exemple(s) :**

Simplifier les expressions ci-dessous :

$A = 2 \times y$ $\qquad B = -3 \times x + 2 \times (5 \times x + 1)$ $\qquad C = 7 \times x \times y + 8 \times 6 \times x \times x$

$A = 2y$ $\qquad B = -3x + 2(5x+1)$ $\qquad C = 7xy + 8 \times 6x^2 = 7xy + 48x^2$

Définition 2 : Réduire

Réduire une expression littérale, c'est regrouper les termes par famille.

☞ **Exemple(s) :**

Réduire les expressions ci-dessous :

$D = 10x - 6x^2 - 7 + 3x - 5x^2 - 3$ $\qquad E = 3y + 5x - 2 + 4x^2 + 5 - x + 2y + y$

$D = 10 + 3x - 6x^2 - 5x^2 - 7 - 3$ $\qquad E = 4x^2 + 5x - x + 3y + 2y + y - 2 + 5$

$D = 13x - 11x^2 - 10$ $\qquad E = 4x^2 + 4x + 6y + 3$

Remarque : On met les termes de plus haut degré (ex : $4x^2$ dans E) en premier, et on termine par les constantes (ex : 3 dans E).

Exemple(s) :

Simplifier puis **réduire** les expressions suivantes :

$F = 5 \times x + 3 \times 2 \times x - 7 \times (6 \times x - 3 \times y)$

$F = 5x + 6x - 7(6x - 3y)$

$F = 11x - 7(6x - 3y)$

$G = 5 \times x + 3 \times x \times x - 5 + 3 \times x - x \times x$

$G = 5x + 3x^2 - 5 + 3x - x^2$

$G = 2x^2 + 8x - 5$

B) Développer un produit avec la distributivité simple

Définition 3 : Distributivité simple

Développer, c'est transformer un produit $(\times)$ et somme $(+)$.

Méthode 1 : Utiliser la distributivité simple

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Exemple(s) :

Développer puis **réduire** les expressions ci-dessous :

$H = 4(x + y)$

$H = 4x + 4y$

$I = 7(x + 3)$

$I = 7x + 7 \times 3$

$I = 7x + 21$

$J = 2(3y + 5)$

$J = 2 \times 3y + 2 \times 5$

$J = 6y + 10$

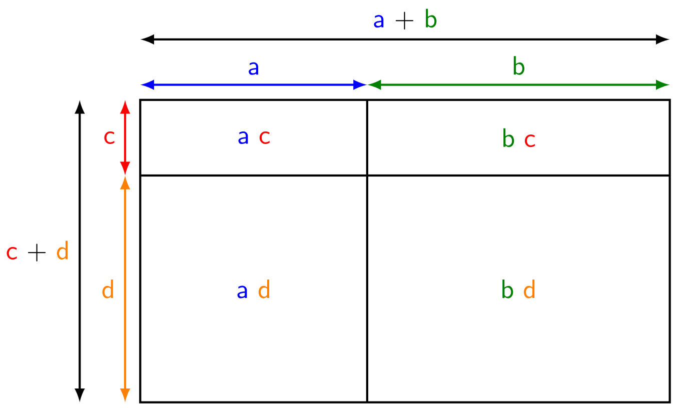
$K = t(3t - 9)$

$K = t \times 3t - t \times 9$

$K = 3t^2 - 9t$

C) Développer un produit avec la double distributivité

Méthode 2 : Utiliser la double distributivité



Aire du rectangle avec les longueurs des grands côtés :

$\mathcal{A} = (a + b) \times (c + d)$

Aire du rectangle par somme des sous-rectangles :

$\mathcal{A} = a\ c + a\ d + b\ c + b\ d$

Propriété 2 : Double distributivité

$$(a+b)\times(c+d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$$

Exemple(s) :

Développer puis **réduire** des expressions ci-dessous :

$L = (x+3)(2+y)$

$L = 2x + xy + 3\times 2 + 3y$

$L = 2x + xy + 6 + 3y$

$M = (2x+3)(x+8)$

$M = 2x\times x + 2x\times 8 + 3\times x + 3\times 8$

$M = 2x^2 + 16x + 3x + 24$

$M = 2x^2 + 19x + 24$

$N = (x+5)(x-2)$

$N = (x+5)(x+(-2))$

$N = x^2 + 2\times(-2) + 5x + 5\times(-2)$

$N = x^2 - 2x + 5x - 10$

$N = x^2 + 3x - 10$

Propriété 3 : Cas particulier

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 + a\times(-b) + b\times a + b\times(-b)\\ &= a^2 - a\,b + a\,b - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemple(s) :

Développer puis **réduire** des expressions ci-dessous :

$O = (x+3)(x-3)$

$O = x^2 - 3^2$

$O = x^2 - 9$

$P = (2x+y)(2x-y)$

$P = (2x)^2 - y^2$

$P = 4x^2 - y^2$

$Q = (1-t)(1+t)$

$Q = 1^2 - t^2$

$Q = 1 - t^2$

Exercices

Exercice 1 : ☆

Pour chaque expression, proposer une écriture **plus simple** :

1) $2x \times 5 = \mathbf{10x}$

2) $4 \times y - 7 = \mathbf{4y - 7}$

3) $t + 5 \times t \times t = \mathbf{5t^2 + t}$

4) $n \times 1 \times n = \mathbf{n^2}$

5) $6s \times 3z = \mathbf{18sz}$

6) $2 \times x \times 7 \times x \times x = \mathbf{14x^3}$

7) $x \times y - y = \mathbf{xy - y}$

8) $x \times (x+1) \times y \times x = \mathbf{x^2y(x+1)}$

Exercice 2 : ☆

Réduire les expressions suivantes :

1) $A = 3x - 4x^2 + 7x = \mathbf{10x - 4x^2}$

2) $B = 9x^2 + 8 - 6x^2 - 10 = \mathbf{3x^2 - 2}$

3) $C = 13 + 8x - 7 - x = \mathbf{7x + 6}$

4) $D = x^2 - 3x + 2x - 5x^2 = \mathbf{-4x^2 - x}$

Exercice 3 : ☆☆

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 3 \times (2 \times x - 5) + 6 \times x \times x$

$A = \mathbf{3(2x - 5) + 6x^2}$

$B = 5 \times x \times y - x \times (y+2) \times 4 + 11 \times y$

$B = \mathbf{5xy - 4x(y+2) + 11y}$

$C = -6 \times x + x \times 2 \times x + 4 \times (11 + 3 \times x)$

$C = \mathbf{-6x + 2x^2 + 4(11 + 3x)}$

$D = 3 \times (2 \times x + 1) \times (2 \times x + 1)$

$D = \mathbf{3(2x+1)^2}$

$E = 4 \times x \times y + 2 \times (6 \times x + 7 \times y) - x \times 3 \times y$

$E = \mathbf{4xy + 2(6x + 7y) - 3xy}$

Exercice 4 : ☆☆

Réduire les expressions suivantes :

1) $A = 6x^2 + 9x + 3x^2 - 6 - 2x = \mathbf{9x^2 + 7x - 6}$

2) $B = 11x + 7x - 6x^2 - 2x - 4x^2 = \mathbf{-10x^2 + 16x}$

3) $C = 8x + 5 - 2x^2 - 7x - 15 + 8x^2 = \mathbf{6x^2 + x - 10}$

4) $D = 6x^2 + 3x + 12x - 9 - 10x^2 + x - 4 = \mathbf{-4x^2 + 16x - 13}$

Exercice 5 : ☆

Associer chaque expression à son écriture développée et réduite :

$-4(y+3) + 7y$	$3y^2 + 16y$
$11y + 9 + 6(7-y)$	$19y^2 + 5y + 1$
$5y^2 - 2y(y-8)$	$3y - 12$
$y^2 + 2y + 1 + 3y(6y+1)$	$5y + 51$

Exercice 6 : ☆

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $A = -3(x+7) = \mathbf{-3x + (-3) \times 7 = -3x - 21}$

2) $B = 4(2x - 3) = \mathbf{8x - 12}$

3) $C = -11(-x - 5) = \mathbf{11x + 55}$

4) $D = x(2x + 9) = \mathbf{2x^2 + 9x}$

5) $E = -3x(6 + 4x) = \mathbf{-18x - 12x^2}$

Exercice 7 : ☆

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $F = -2x(10 - 5x) = \mathbf{-20x + 10x^2}$

2) $G = 3(5 + x) = \mathbf{15 + 3x}$

3) $H = 7(x - 8) = \mathbf{7x - 56}$

4) $I = 10(y + 9) = \mathbf{10y + 90}$

5) $J = x(6 - x) = \mathbf{6x - x^2}$

Exercice 8 : ☆

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $10(4+3x) = \mathbf{40+30x}$

2) $x(17-2x) = \mathbf{17x-2x^2}$

3) $8(1,5+x+6y) = \mathbf{12+8x+48y}$

4) $(x-y)\times 5 = \mathbf{5x-5y}$

Exercice 9 : ☆☆

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $-x(10-2y) = \mathbf{-10x+2xy}$

2) $8y(-3+0,5x) = \mathbf{-24y+4xy}$

3) $5x-3(x+12) = \mathbf{5x-3x-36}$

$\quad = \mathbf{2x-36}$

Exercice 10 : ☆☆☆

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $A = 3x-6+7(2x+4) = \mathbf{3x-6+14x+28 = 17x+22}$

2) $B = 2x^2+x(4x-5) = \mathbf{2x^2+4x^2-5x = 6x^2-5x}$

3) $C = 4x^2-x+x(5x-9) = \mathbf{4x^2-x+5x^2-9x = 9x^2-10x}$

4) $D = 5(a+2)-(6a-7) = \mathbf{5a+10-6a+7 = -a+17}$

5) $E = -b(3b+7)+(5-b)\times b = \mathbf{-3b^2-7b+5b-b^2 = -4b^2-2b}$

6) $F = -c(4+3c)-(9-2c+6c^2) = \mathbf{-4c-3c^2-9+2c-6c^2 = -9c^2-2c-9}$

7) $G = -5d+5d(d-2)-6(7-3d) = \mathbf{-5d+5d^2-10d-42+18d = 5d^2+3d-42}$

Exercice 11 : ☆

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

$A = (2+x)(15-y) = \mathbf{30-2y+15x-xy}$
$A = \mathbf{-xy+15x-2y+30}$

$B = (7+y)(y-4) = \mathbf{7y-28+y^2-4y}$
$B = \mathbf{y^2+3y-28}$

$C = (z-25)(x+z) = \mathbf{xz+z^2-25x-25z}$
$C = \mathbf{z^2+xz-25x-25z}$

$D = (t-3)(t-13) = \mathbf{t^2-13t-3t+39}$
$D = \mathbf{t^2-16t+39}$

$E = (x+3)(x+2) = \mathbf{x^2+2x+3x+6}$
$E = \mathbf{x^2+5x+6}$

$F = (x-7)(x+9) = \mathbf{x^2+9x-7x-63}$
$F = \mathbf{x^2+2x-63}$

$G = (x-3)(4-x) = \mathbf{4x-x^2-12+3x}$
$G = \mathbf{-x^2+7x-12}$

$H = (3x+4)(5x-7) = \mathbf{15x^2-21x+20x-28}$
$H = \mathbf{15x^2-x-28}$

$I = (k+4)(k-4) = \mathbf{k^2+4k-4k-16}$
$I = \mathbf{k^2-16}$

Exercice 12 : ☆☆

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

$A = (x+5)(10+7x) = \mathbf{10x+7x^2+50+35x}$
$A = \mathbf{7x^2+45x+50}$

$B = (5-9x)(2x+8) = \mathbf{10x+40-18x^2-72x}$
$B = \mathbf{-18x^2-62x+40}$

$C = (9-3y)(6-5y) = \mathbf{54-45y-18y+15y^2}$
$C = \mathbf{15y^2-63y+54}$

$D = (2x-3)(7-x) = \mathbf{14x-2x^2-21+3x}$
$D = \mathbf{-2x^2+17x-21}$

$E = (x+y)(2x-y) = \mathbf{2x^2-xy+2xy-y^2}$
$E = \mathbf{2x^2+xy-y^2}$

$F = (x-7)(2+y) = \mathbf{2x+xy-14-7y}$
$F = \mathbf{2x-7y+xy-14}$

$G = (x-1)(1-x) = \mathbf{x-x^2-1+x}$
$G = \mathbf{x^2+2x-1}$

$H = 3(3a+4)^2 = \mathbf{3(3a+4)(3a+4)}$
$H = \mathbf{3(9a^2+12a+12a+16)}$
$H = \mathbf{3(9a^2+24a+16)}$
$H = \mathbf{27a^2+72a+48}$

Exercice 13 : ☆☆☆

Programme A :

- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Calculer le carré du résultat obtenu
- Soustraire le carré du nombre de départ

1) Voici un programme de calcul.

a. Yanis choisit 4 comme nombre de départ. Vérifier qu'il obtient bien 33 comme résultat du programme.

$4+3=7$; $7^2=49$

$49-4^2=49-16=33$

b. Il choisit ensuite -5 comme nombre de départ. Quel résultat obtient-il ?

$-5+3=-2$; $(-2)^2=4$; $4-(-5)^2=4-25=\mathbf{-21}$

Il obtient -**21** s'il démarre avec -5.

Programme B :

- Choisir un nombre
- Multiplier par 6
- Ajouter 9 au résultat obtenu

2) Voici un autre programme de calcul.

a. Élia affirme : « Si on choisit **n'importe quel** nombre et qu'on lui applique les 2 programmes, on obtient toujours le même résultat ». Prouver qu'elle a raison.

Prgm A : $(x+3)^2-x^2=(x+3)(x+3)-x^2$

Prgm A : $\quad =x^2+3x+3x+9=\mathbf{6x+9}$

Prgm B : $x\times 6+9=\mathbf{6x+9}$

Quel que soit le nombre de départ x, les programmes A et B donnent toujours le même résultat.

b. Quel nombre de départ faut-il prendre pour que le résultat final soit 54 ?

Il faut « remonter » le programme :

- *Enlever* 9 au résultat *final* : $54-9=45$
- *Diviser* par 6 : $45\div 6=7{,}5$

Pour obtenir 54 au final, il faut prendre **7,5** comme nombre de départ.

Exercice 14 : ☆☆☆

Deux nombres ont pour **somme** 300. De combien augment leur **produit** si on augmente chacun d'eux de 7 ?

Notons a et b ces deux nombres. On sait donc que $a+b=300$. Calculons maintenant :

$$\begin{aligned}(a+7)(b+7)&=ab+\underline{7a+7b}+49\\&=ab+7(\underline{a+b})+49\\&=ab+7\times 300+49\\&=ab+2\ 149\end{aligned}$$

Si on augmente chacun d'eux de 7, le produit augment de **2 149**.

Exercice 15 : ☆☆☆

1) Soit n un nombre entier. Écrire en fonction de n :

a. son double :

$$2\times n=2n$$

b. son triple :

$$3\times n=3n$$

2) Montrer que la somme d'un nombre entier, de son double et de son triple est divisible par 6 :

$$n+2n+3n=n(1+2+3)=6n$$

Mises au Travail