

Séquence 4 : Calcul littéral (2) - Factorisation

   **OBJECTIFS :**   

À la fin de cette Séquence 4, je dois connaître ...	Pour m'entraîner :
La définition de « factoriser ».	Cours partie B
Les formules de factorisation.	Cours partie B

Je dois savoir faire ...	Pour m'entraîner :		
	☆	☆☆	☆☆☆
Développer, simplifier et réduire une expression littérale (voir S6).	n°1	n°2	
Reconnaître une expression littérale factorisée.	n°3		
Retrouver le facteur commun dans une expression littérale.	n°4	n°5	
Factoriser une expression littérale.	n°6	n°7, 9	n°8
Traduire un programme de calcul par une expression littérale.		n°10	n°11
Résoudre des problèmes faisant appel au calcul littéral (dont type Brevet).			n°12

A) Rappels sur la distributivité simple

Développer, c'est transformer un *produit* (\times) en *somme* (+) ou *différence* ($-$). Moins formellement, il s'agit de « se débarrasser des parenthèses » :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

 **Exemple(s) :**

$$A = 24(x + y)$$

$$A = 24 \times x + 24 \times y$$

$$A = 24x + 24y$$

$$B = 2x(2x - 3z)$$

$$B = 2x \times 2x - 2x \times 3z$$

$$B = 4x^2 - 6xz$$

B) Factorisation

Définition 1 : Factoriser

Factoriser une expression, c'est la mettre sous forme d'un **produit**.

 **Exemple(s) :**

Entoure les expressions **factorisées** :

$$C = 2x - 15$$

$$D = x(x - 2)$$

$$E = 2(1 + x)$$

$$F = 3(5 + x)(32 + 5x)$$

$$G = (x - 4) - 3(5 + 2x)$$

$$H = (x + 10)^2$$

Propriété 1 : Formules de factorisation

Pour factoriser, il faut trouver le **facteur commun** :

$$\textcircled{k} a + \textcircled{k} b = k (a + b)$$

$$\textcircled{k} a - \textcircled{k} b = k (a - b)$$

☞ Exemple(s) :

$$I = 4x - 2x + 7x$$

$$I = x(4 - 2 + 7)$$

$$I = 9x$$

$$L = 4t - 5tx + 3t$$

$$L = t(4 - 5x + 3)$$

$$L = t(7 - 5x)$$

$$J = 4x - 4y + 8$$

$$J = 4x + 4y + 4 \times 2$$

$$J = 4(x + y + 2)$$

$$M = x^2 + 3x - 5x^2$$

$$M = x \times x + 3x - 5x \times x$$

$$M = x(x + 3 - 5x)$$

$$M = x(-4x + 3)$$

$$K = 3t + 9u + 3$$

$$K = 3t + 3 \times 3u + 3 \times 1$$

$$K = 3(t + 3u + 1)$$

$$N = 3x - x$$

$$N = 3x - 1x$$

$$N = x(3 - 1)$$

$$N = 2x$$

C) Pour aller plus loin...

1. Factoriser une expression entière

$$O = 2(4x + 1) + y(4x + 1)$$

$$O = (4x + 1)(2 + y)$$

$$P = (x - 1)(x + 6) - 3(x - 1)$$

$$P = (x - 1)(x + 6 - 3)$$

$$P = (x - 1)(x + 3)$$

2. Cas particulier

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

☞ Exemple(s) :

$$Q = x^2 - y^2$$

$$Q = (x + y)(x - y)$$

$$R = x^2 - 9$$

$$R = x^2 - 3^2$$

$$R = (x + 3)(x - 3)$$

$$S = 16x^2 - 4$$

$$S = (4x)^2 - 2^2$$

$$S = (4x + 2)(4x - 2)$$

Exercices

☞ Exercice 1 : ☆

Développer puis simplifier et réduire les expressions suivantes :

$$A = -3(x + 7)$$

$$B = x(2x + 9)$$

$$C = -3x(6 + 4x)$$

$$A = -3 \times x - 3 \times 7$$

$$B = x \times 2x + x \times 9$$

$$C = -3x \times 6 - 3x \times 4x$$

$$A = -3x - 21$$

$$B = 2x^2 + 9x$$

$$C = -18x - 12x^2$$

☞ Exercice 2 : ☆☆

Développer puis simplifier et réduire les expressions suivantes :

$$D = -2x(10 - 5x) + x^2$$

$$E = 3x^2(7 - 2x) + x(x + 4)$$

$$D = -2x \times 10 + 2x \times 5x + x^2$$

$$E = 3x^2 \times 7 - 3x^2 \times 2x + x \times x + x \times 4$$

$$D = -20x + 10x^2 + x^2$$

$$E = 21x^2 - 6x^3 + x^2 + 4x$$

$$D = 11x^2 - 20x$$

$$E = -6x^3 + 22x^2 + 4x$$

☞ Exercice 3 : ☆

Entourer les expressions factorisées :

$$F = (2x - 3)(7 - x)$$

$$G = 7z + 9y$$

$$H = 5(p + 3) + (5 + s)$$

$$I = 5(p + 3) \times (5 + s)$$

$$J = (x - 1)(5x + 4) + (3 + x)(x - 1)$$

$$K = -5(4 - b)^2$$

$$L = (x + 1)(4x + 5) - w - 1$$

$$M = x(x - 2)$$

☞ Exercice 4 : ☆

Entourer le **facteur commun** dans les expressions ci-dessous :

$$N = (3)x + (3)y$$

$$O = (4)(y + 2) - (4)x$$

$$P = -6(3x - 2) - 4(3x - 2)$$

$$Q = -(3)a + (3)b$$

$$R = 4(xy) - 3(xy)$$

$$S = (x + 2)(x + 1) + (x + 2)(7x - 5)$$

$$T = 7(x) + 12(x)$$

$$U = (2t)u + (2t)y$$

$$V = 4x(7x + 3) - (3 + 7x)(x + 4)$$

☞ Exercice 5 : ☆☆

Entourer le **facteur commun** dans les expressions ci-dessous (⚠ il faut parfois modifier un peu l'expression pour le faire apparaître!) :

$$W = 7a - 7b \quad \rightarrow 7$$

$$X = 8x + 15x^2 = 8x = 15 \times x \quad \rightarrow x$$

$$Y = 3x^2 + 9x = 3x \times x + 3x \times 3 \quad \rightarrow 3x$$

$$Z = 2x(x + 1) + 5(x + 1) \quad \rightarrow (x + 1)$$

$$A = 7z + 14 \quad 7z + 7 \times 2 \quad \rightarrow 7$$

$$B = 6(x + 2) + 24(x - 2) \quad 6(x + 2) + 6 \times 4(x - 2) \quad \rightarrow 6$$

🔗 **Exercice 6** : ☆

Factoriser les expressions suivantes :

$$C = 4r + 4t$$

$$D = 7z - 9z$$

$$E = 3y^2 + 2y$$

$$C = 4(\mathbf{r + t})$$

$$D = \mathbf{z(7 - 9)}$$

$$E = \mathbf{3y \times y + 2y}$$

$$D = \mathbf{-2z}$$

$$E = \mathbf{y(3y - 2)}$$

$$F = 4xt + 4xp$$

$$G = 6xy - 12x$$

$$H = 14x^2 + 21yx + 28x^3$$

$$F = \mathbf{4x(t + p)}$$

$$G = \mathbf{6xy - 6x \times 2}$$

$$H = \mathbf{7x \times 2x + 7x \times 3y + 7x \times 4x^2}$$

$$G = \mathbf{6x(y - 2)}$$

$$H = \mathbf{7x(2x + 3y + 4x^2)}$$

🔗 **Exercice 7** : ☆☆

Factoriser les expressions suivantes :

$$I = 8x + 15x$$

$$J = 11x - 33x^2$$

$$K = -2x^2 + 2x$$

$$I = \mathbf{x(8 + 15)}$$

$$J = \mathbf{11x \times 1 - 11x \times 3x}$$

$$K = \mathbf{-x \times 2x + 1 \times 2x}$$

$$I = \mathbf{x \times 23}$$

$$J = \mathbf{11x(1 - 3x)}$$

$$K = \mathbf{2x(-x + 1)}$$

$$I = \mathbf{23x}$$

🔗 **Exercice 8** : ☆☆☆

Factoriser les expressions suivantes :

$$L = 4x(x + 2) + 4x(x - 2)$$

$$M = 22x(y + 4) - 11x(2y - 6)$$

$$L = \mathbf{4x(x + 2 + x - 2)}$$

$$M = \mathbf{11x \times 2(y + 4) - 11x(2y - 6)}$$

$$L = \mathbf{4x(2x + 0)}$$

$$M = \mathbf{11x \times (2y + 8) - 11x(2y - 6)}$$

$$L = \mathbf{4x \times 2x}$$

$$M = \mathbf{11x(2y + 8 - 2y + 6)}$$

$$L = \mathbf{8x^2}$$

$$M = \mathbf{11x \times 14}$$

$$M = \mathbf{154x}$$

🔗 **Exercice 9** : ☆☆☆

Factoriser les expressions suivantes :

$$N = 5(x + 1) + 3(x + 1)$$

$$O = 3x(x + 2) - 5(x + 2)$$

$$P = (2x - 1)(3x + 4) + (5 + x)(2x - 1)$$

$$N = \mathbf{(x + 1)(5 + 3)}$$

$$O = \mathbf{(x + 2)(3x - 5)}$$

$$P = \mathbf{(2x - 1)(3x + 4 + 5 + x)}$$

$$N = \mathbf{8(x + 1)}$$

$$P = \mathbf{(2x - 1)(4x + 9)}$$

$$Q = t^2 - 4$$

$$R = 4u^2 - 9$$

$$S = 16x^4 - 36y^2$$

$$Q = \mathbf{t^2 - 2^2}$$

$$R = \mathbf{(2u)^2 - 3^2}$$

$$S = \mathbf{(4x^2)^2 - (6y)^2}$$

$$Q = \mathbf{(t + 2)(t - 2)}$$

$$R = \mathbf{(2u + 3)(2u - 3)}$$

$$S = \mathbf{(4x^2 + 6y)(4x^2 - 6y)}$$

Exercice 10 : ☆☆☆

Voici un programme de calcul :

- ☞ Choisis un nombre
- ☞ Ajoute 5
- ☞ Multiplie par 3 le résultat obtenu
- ☞ Enlève 15

1) Que donne ce programme de calcul si on choisi le nombre 7 ?

- ☞ 7
- ☞ $7 + 5 = 12$
- ☞ $12 \times 3 = 36$
- ☞ $36 - 15 = 21$

Si on choisi le nombre 7, on obtient 21.

2) Traduire ce programme de calcul par une expression littérale, puis factoriser cette expression :

- ☞ x
- ☞ $x + 5$
- ☞ $(x + 5) \times 3 = 3(x + 5)$
- ☞ $3(x + 5) - 15$

Le programme de calcul peut se traduire par l'expression littérale suivante :

$$3(x + 5) - 15 = 3(x + 5) - 3 \times 5 = 3(x + 5 - 5) = 3 \times x = 3x$$

Exercice 11 : ☆☆☆

Voici 2 programmes de calcul :

Programme A :

- ☞ Choisis un nombre
- ☞ Ajoute 6 à ce nombre
- ☞ Multiplie le résultat par -2
- ☞ Ajoute le quadruple du nombre choisi au départ

Programme B :

- ☞ Choisis un nombre
- ☞ Soustrais 3 à ce nombre
- ☞ Multiplie le résultat par 4
- ☞ Soustrais le double du nombre choisi au départ

1) Teste ces deux programmes de calcul en choisissant 2, puis 3, puis 4 :

	Pour 2 :	Pour -3 :	Pour 4 :
A :	$(2 + 6) \times (-2) + 4 \times 2 = -8$	$(-3 + 6) \times (-2) + 4 \times -3 = -18$	$(4 + 6) \times (-2) + 4 \times 4 = -4$
B :	$(2 - 3) \times 4 - 2 \times 2 = -8$	$(-3 - 3) \times 4 - 2 \times -3 = -18$	$(4 - 3) \times 4 - 2 \times 8 = -4$

2) Que remarques-tu ? Prouve-le.

Les deux programmes semblent donner toujours le même résultat. Vérifions-le :

$$A = (x + 6) \times (-2) + 4x$$

$$A = -2(x + 6) + 4x = -2x - 12 + 4x$$

$$A = 2x - 12$$

$$B = (x - 3) \times 4 - 2x$$

$$B = 4(x - 3) - 2x = 4x - 12 - 2x$$

$$B = 2x - 12$$

☞ Exercice 12 : ☆☆☆

(D'après DNB Pondichéry 2017)

1) Développer et réduire l'expression E ci-dessous :

$$E = (x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2)$$

$$E = x \times 2x + x \times 3 - 2 \times 2x - 2 \times 3 - 3 \times x + 3 \times 2$$

$$E = 2x^2 + 3x - 4x - 6 - 3x + 6 = 2x^2 - 4x$$

2) Factoriser l'expression obtenue :

$$E = x \times 2x - 2 \times 2x$$

$$E = 2x(x - 2)$$

3) Vérifier que $E = 2F$, avec $F = x(x - 2)$:

$$E = 2x(x - 2) = 2 \times \underbrace{x(x - 2)}_F = 2F$$

