158 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

✱ dévpmts possibles

$(G,\times)$ gpe de neutre 1_G ; E un ens. non vide ; $S(E)$ gpe des perm. sur E.

I Définitions et premières propriétés.

Déf 1 : G opère sur E s'il existe une application $\cdot : \begin{array}{ccc} G\times E & \longrightarrow & E \\ (g,x) & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$ tq :

(1) $\forall x\in E,\ 1_G\cdot x = x$

(2) $\forall g,g'\in G, \forall x\in E :\ g\cdot(g'\cdot x) = (g\times g')\cdot x$

Déf 2 : Définition équivalente :

Une action de G sur E est donnée par le morphisme de groupes :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (G,\times) & \longrightarrow & (S(E),\circ) \\ g & \longmapsto & m_g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \varphi(g)(x) \end{array} \end{array}$$

On peut alors noter :

$$g\cdot x = \varphi(g)(x).$$

Déf 3 : Une action de G sur E est fidèle si le morphisme associé est injectif, ie si

$$\left.\begin{array}{l} g\in G \\ \forall x\in E,\ g\cdot x = x \end{array}\right\} \Leftrightarrow g = 1_G$$

Déf 4 : L'orbite de $x\in E$ sous l'action de G est : $\Theta_x = G\cdot x = \{g\cdot x \mid g\in G\}$.

s'il y a une seule orbite, on dit que l'action est transitive.

Thm 5 : L'ensemble des orbites forme une partition de E.

Thm 6 : de Cayley :

Tout gpe d'ordre $m\in\mathbb{N}^*$ est isomorphe à un ss-gpe de S_m.

Déf 7 : Le stabilisateur de $x\in E$ sous l'action de G est :

$$G_x = \{g\in G \mid g\cdot x = x\}.$$

si $\forall x\in E$, $G_x = \{1_G\}$, on dit que l'action est libre.

Thm 8 : Libre $\Rightarrow$ fidèle.

II Propriétés sur les cardinaux et applications :

Thm 9 :

$\forall x\in E$, $\mathrm{Card}(\Theta_x) = [G : G_x] \overset{\text{si } G \text{ est fini}}{=} \dfrac{|G|}{|G_x|}$

Thm 10 : Formule des classes :

Si E fini et $\mathcal{O}$ = {repr. des orbites} :

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{x\in\mathcal{O}} \frac{|G|}{|G_x|}$$

Thm 11 : Corollaire :

Soit $\mathcal{O}$ un ens. de repr. des classes de conjugaison non réduites à un élément. Alors :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x\in\mathcal{O}} \frac{|G|}{|Z(x)|}$$

Déf 12 : $\forall x\in G$, le centralisateur de x :

$$Z(x) = \{g\in G \mid gx = xg\}$$

Rmq : $x\in Z(G) \Leftrightarrow \Theta_x = \{x\}$.

Déf 13 : Soit $p\in\mathbb{P}$ (premier).

On appelle p-groupe tout groupe de cardinal p^α, $\alpha\in\mathbb{N}^*$.

Thm 14 : $p\in\mathbb{P}$ et G un p-gpe opérant sur E fini. Alors :

$$\mathrm{Card}(E^G) \equiv \mathrm{Card}(E)\ [p]$$

Thm 15 : $\forall p\in\mathbb{P}$, le centre d'un p-groupe est non trivial.

* $E^G = \{x\in E \mid \Theta_x = \{x\}\}$.

Thm 16 : Tout groupe d'ordre p^2 avec $p\in\mathbb{P}$ est commutatif.

Thm 17 : de Cauchy : ✱ 1

Soit G un gpe fini avec $|G| = m \geq 2$.

$\forall p\in\mathbb{P}$ tq $p \mid m$, $\exists g\in G$ tq $\mathrm{ord}(g) = p$.

(donc il existe un ss-gpe d'ordre p).

Thm 18 : Formule de Burnside : ✱ 2

Si G et E sont finis, notons $\mathrm{Fix}(g) = \{x\in E \mid g\cdot x = x\}$ et $\Theta = \{\Theta_x \mid x\in E\}$ l'ens. des orbites.

Alors : $$|\Theta| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Application 19 : ✱ 2

Combien de colliers peut-on faire avec 4 perles bleues, 3 blanches et 2 oranges ?