229) Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.

I Définitions et premières propriétés.

Déf 1 : Une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ ($X \sim \mathcal{B}(p)$) si :
$\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

Exemple 2 : pile ou face.

Thm 3 : Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors :
- $\mathbb{E}[X] = p$
- $Var(X) = p(1-p)$

Déf 4 : Une v.a.r. X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$ ($X \sim \mathcal{B}(n,p)$) si :
$\forall k \in [\![0;n]\!]$: $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exemple 5 : Nombre de "pile" pour n lancers.

Thm 6 : $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Thm 7 : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors :
- $\mathbb{E}[X] = np$
- $Var(X) = np(1-p)$

II Théorèmes de convergence.

Thm 8 : Inégalité de Markov :
Soit X une v.a.r. ≥ 0 qui admet un moment d'ordre 1. Alors $\forall a > 0$:
$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$

Thm 9 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
Soit X une v.a.r. qui admet un moment d'ordre 2. Alors $\forall a > 0$:
$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$

Lemme 10 : Inégalité de concentration :
Soit X une v.a.r. qui admet un moment d'ordre 2. Soit $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ iid de même loi que X.
Notons : $\boxed{\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$
Alors :
$\forall a > 0$: $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{na^2}$

Thm 11 : Loi faible des gds nbs :
Soient $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$.
Alors : $\overline{X_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} p$.

III Approximations de la loi binomiale.

1 Par la loi de Poisson :

Déf 12 : Une v.a.r. X suit une $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ si :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$

Thm 13 : $\lambda > 0$, $(p_n)_n \in [0;1]^{\mathbb{N}}$ tq $np_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$
Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ alors :
$\forall k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$
(ie $\mathcal{B}(n, p_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$).

Règle empirique : $n \geq 30$ et $p \leq 0{,}1 \Rightarrow \mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{P}(\lambda)$.

Applications. Évènem'ts rares (coquilles, clients, raisins)

2 Par la loi de Gauss :

Thm 14 : Moivre-Laplace :
Soient $p \in]0;1[$, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.
On pose $\widetilde{S_n} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Alors : $\widetilde{S_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1)$.

Règle empirique : $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$
$\Rightarrow \mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Thm 16 : Intervalle de fluctuation :
$(X_i)_i$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$ et $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
Alors :
$\forall \gamma \in [0;1[$: $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \in \left[p \pm \frac{z_\gamma \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \gamma$

Lemme 15 : $\forall \gamma \in [0;1[$, $\exists! \, z_\gamma \geq 0$ tq :
$\int_{-z_\gamma}^{z_\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = \gamma$

Thm 17 : Intervalle de confiance :
$(X_i)_i$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0;1[$ inconnue :
Alors $\forall \gamma \in [0;1[$:
$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X_n} \pm \frac{z_\gamma}{2\sqrt{n}}\right]\right) \geq \gamma$

En pratique : $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow z_\gamma \simeq 1{,}96$

Exemple : Sondage sortie des urnes.