# Séquence 3 : Pourcentages et proportionnalité

**OBJECTIFS :**

| À la fin de cette Séquence 3, je dois **connaître**... | Pour m'entraîner : |
|---|---|
| Dans quel cas je suis dans une situation de proportionnalité ou non. | Cours partie A)1. |
| Au moins une ou deux méthodes pour calculer une quatrième proportionnelle. | Cours partie A)2. |
| La propriété permettant de calculer t% d'une quantité. | Cours partie B) |
| La propriété permettant d'exprimer une proportion en pourcentage. | Cours partie B) |

| Je dois **savoir faire**... | Pour m'entraîner : ☆ | ☆☆ | ☆☆☆ |
|---|---|---|---|
| Reconnaître une situation de proportionnalité. | n°1, 3 | n°2 | |
| Compléter un tableau de proportionnalité. | n°4 | n°5 | |
| Résoudre des problèmes dans des situations de proportionnalité. | | n°6, 7 | |
| Appliquer un pourcentage. | n°8, 9, 10 | | |
| Calculer un nouveau prix après réduction ou augmentation. | n°11 | | |
| Exprimer une proportion en pourcentage. | n°12 | n°14 | n°13 |
| Exercices type Brevet | n°16 (⚠) | n°15 | n°17 |

## A) Rappels sur la proportionnalité

### 1. Reconnaître une situation de proportionnalité

**Définition 1 :**
Deux *grandeurs* sont dites proportionnelles si les *valeurs* de l'une sont obtenues en multipliant les *valeurs* de l'autre toujours par un même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**.

On représente en général des grandeurs sous forme d'un tableau ou d'un graphique. Il exite plusieurs méthodes pour déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles entre elles ou non :

**Méthode 1 : Chercher un coefficient de proportionnalité entre les 2 lignes du tableau**

Voici le prix des baguettes de pain dans une boulangerie :

| Nombre de baguettes | 1 | 5 | 12 |
|---|---|---|---|
| Prix (en €) | 0,80 | 4 | 9,6 |

× 0,8

Il s'agit bien d'un tableau de proportionnalité. En effet :

$0,80 \div 1 = 0,8$ $\quad$ $4 \div 5 = 0,8$ $\quad$ $9,6 \div 12 = 0,8$

**Méthode 2 : Vérifier si les produits en croix sont égaux**

Voici la masse de béton nécessaire à la fabrication d'un volume donné :

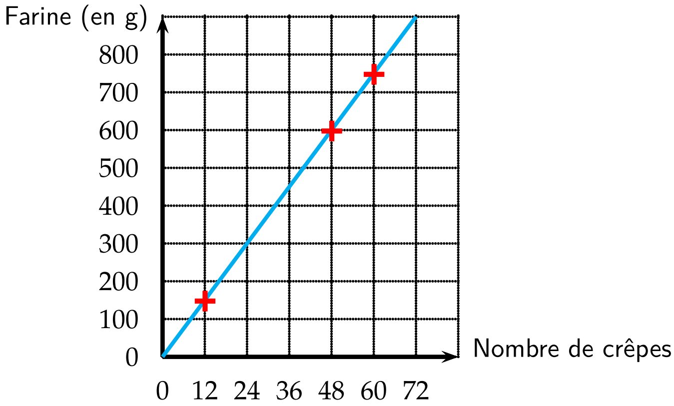
| Volume de béton ($m^3$) | 1,5 | 4 | 6,2 |
|---|---|---|---|
| Masse de béton (kg) | 525 | 1 400 | 2 170 |

Il s'agit bien d'un tableau de proportionnalité. En effet :

$1,5 \times 1\,400 = 2\,100$ $\quad$ $525 \times 4 = 2\,100$ $\quad$ ET $\quad$ $4 \times 2\,170 = 8\,680$ $\quad$ $1400 \times 6,2 = 8\,680$

### Méthode 3 : Vérifier si les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère

Voici la quantité de farine nécessaire pour faire des crêpes :




Il s'agit bien d'une situation de proportionnalité, car les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine du repère.

## 2. Calculer une quatrième proportionnelle

Plusieurs méthodes permettent de calculer une valeur manquante par proportionnalité, en passant par un tableau de proportionnalité ou non.

### Méthode 1 : Passage à l'unité

Si 3 gâteaux coûtent 39 €, combien coûtent 5 gâteaux ?

- Prix d'1 gâteau : 39 €$\div$ 3 = **13 €**
- Prix de 5 gâteaux : 13 €$\times$ 5 = **65 €**

5 gâteaux coûtent donc 65 €.

### Méthode 2 : Produit en croix dans un tableau de proportionnalité

Dans une recette, il faut utiliser 3 œufs pour 35 cL de lait. Combien faut-il de lait si on utilise 10 œufs ?

| Nombre d'œufs | 3 | 10 |
|---|---|---|
| Quantité de lait (en cL) | 35 | $x$ |

D'après *l'égalité des produits en croix*, on doit avoir :

$$3 \times x = 10 \times 35$$

$$\text{soit } x = 10 \times 35 \div 3 \approx 116{,}7$$

Il faut donc environ 117 cL de lait pour réaliser cette recette avec 10 œufs.

### Méthode 3 : Avec les propriétés de linéarité de la proportionnalité

Camille met 20 min à parcourir 6 km en vélo, et 15 min à parcourir 4,5 km, le tout à vitesse constante. Combien de temps lui faut-t-il pour parcourir 1,5 km ?

$-$

| Distance (en km) | 6 | 4,5 | *6 - 4,5* = 1,5 |
|---|---|---|---|
| Durée (en min) | 20 | 15 | *20 - 15* = 5 |

Il lui faudra donc 5 min pour parcourir 1,5 km.
Remarque : On aurait aussi pu faire 4,5 km $\div$ 3 = 1,5 km et donc 15 min $\div$ 3 = 5 min. C'est aussi de la linéarité.

# B) Pourcentages

**Propriété 1 :** Pour calculer $t$% d'une quantité, il suffit de multiplier cette quantité par $\frac{t}{100}$.

**Exemple(s) :**

- 12 % de 150 $= \frac{12}{100} \times 150 = 18$
- **⚠IMPORTANT :** Dans un magasin, un pull dont le prix initial est de 35 € bénéficie d'une réduction de 30 %. Quel est son nouveau prix ?
  - On commence par calculer le montant de la réduction : 30 % de 35 € $= \frac{30}{100} \times 35 = 10,5$ €.
  - Puis on calcule le nouveau prix : **prix initial** − **réduction** = 35 € − 10,5 € = 24,5 €.

  Après réduction de 30%, ce pull coûte désormais 24,50 €.
- **⚠IMPORTANT :** Un salarié gagne 1 800 € par mois. Il obtient une augmentation de 7%. Quel est son nouveau salaire ?
  - On commence par calculer le montant de l'augmentation : 7 % de 1 800 € $= \frac{7}{100} \times 1\,800 = 126$ €.
  - Puis on calcule le nouveau salaire : **salaire initial** + **augmentation** = 1 800 € + 126 € = 1 926 €.

  Après son augmentation de 7%, ce salarié gagne désormais 1 926 € par mois.

**Propriété 2 :** Pour exprimer une proportion en pourcentage, il faut la mettre sous forme d'une fraction de dénominateur 100. On peut pour cela s'aider d'un tableau de proportionnalité.

**Exemple(s) :**

Un gâteau de 160 g contient 50 g de chocolat. Quel est le pourcentage de chocolat dans ce gâteau ?
*Cela revient tout simplement à se demander combien il y a de chocolat dans 100 g du gâteau !*

| | | |
|---|---|---|
| Chocolat (en g) | 50 | $x$ |
| Gâteau (en g) | 160 | 100 |

D'après l'égalité des produits en croix :

$$x \times 160 = 50 \times 100$$

$$\text{soit : } x = \frac{50 \times 100}{160} = 31,25$$

Ce gâteau contient donc 31,25 % de chocolat.

# Exercices

☞ **Exercice 1 :** ☆

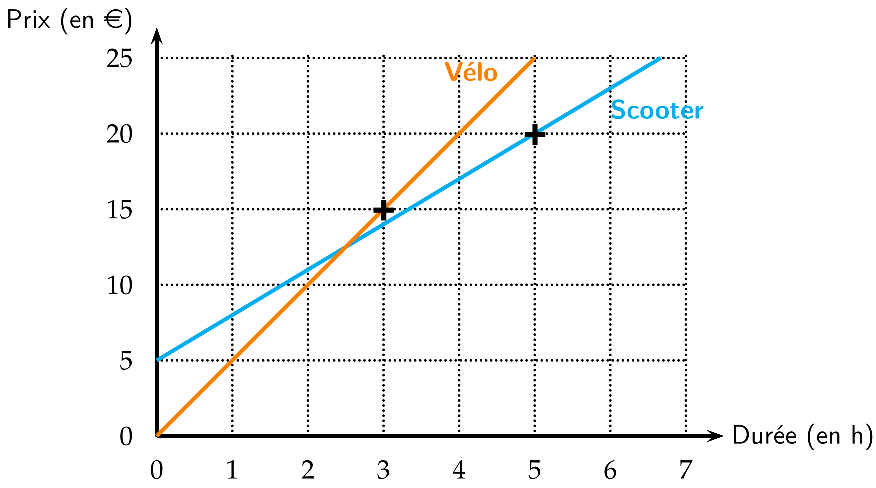
1) La **taille** d'une personne est-elle proportionnelle à son **âge** ?

Si une personne mesure 1,80 m à 20 ans, elle ne mesurera pas 3,60 m à 40 ans. Donc **non**, la taille d'une personne n'est pas proportionnelle à son âge.

2) Au marché, 1 kg de tomates est vendu à 2,20 €. Le **prix** des tomates est-il proportionnel à la **masse** de tomates achetées ?

Pour savoir le prix à payer, on multiplie la masse de tomates achetée par le même nombre : 2,20 €. Donc **oui**, le prix des tomates est proportionnel à la masse achetée.

3) On a représenté ci-dessous le prix de la location d'un scooter ou d'un vélo en fonction de la durée de location :




a. Combien coûte la location d'un vélo pour 3h ?

La location d'un vélo pour 3h coûte 15 €.

b. Payer 20 € permet de louer un scooter pour quelle durée ?

En payant 20 €, on peut louer un scooter pendant 5h.

c. Le prix de la location du vélo est-il proportionnel à la durée de location ?

Oui, car les grandeurs sont représentées par une droite passant par l'origine.

d. Le prix de la location du scooter est-il proportionnel à la durée de location ?

Non, car les grandeurs sont représentées par une droite ne passant **pas** par l'origine.

☞ **Exercice 2 :** ☆☆

**Le périmètre et l'aire d'un carré sont-ils proportionnels à la longueur de son côté ? Justifier.**

$$\mathcal{P} = 4 \times c \qquad \text{ET} \qquad \mathcal{A} = c \times c$$

Le périmètre d'un carré s'obtient en multipliant la longueur de son côté toujours par un même nombre : 4. Le **périmètre** et la **longueur du côté** d'un carré sont donc **proportionnels**.

Un carré de côté 1 cm à une aire de 1 cm$^2$. Si l'on multiplie le côté par 2, son aire vaut alors $2 \times 2 = 4$ cm$^2$. Quand on multiplie la longueur d'un côté par 2, l'aire est elle multipliée par 4. L'**aire** et la **longueur du côté** d'un carré ne sont donc **pas proportionnels**.

## ☞ Exercice 3 : ☆

On a représenté ci-dessous la distance parcourue par un nageur en fonction du temps :

| Distance parcourue (en m) | 210 | 840 | 1 420 |
|---|---|---|---|
| Durée (en min) | 5 | 20 | 34 |

La distance parcourue par ce nageur est-elle proportionnelle à la durée ? Justifier.

$$\frac{210}{5} = 42 \qquad \frac{840}{20} = 42 \qquad \frac{1\ 420}{34} \approx 41,76$$

Donc la distance parcourue par le nageur et la durée du trajet ne sont pas proportionnelles.

## ☞ Exercice 4 : ☆

1) 5 tubes de colle coûtent 6,25 €. Quel est le prix de 9 tubes ?

| Quantité | 5 | 9 |
|---|---|---|
| Prix (en €) | 6,25 | $x$ |

$$x = \frac{6,25 \times 9}{5} = 11,25$$

9 tubes de colle coûtent donc 11,25 €.

2) À scooter, Lilou parcourt 42 km en 50 minutes. Quelle distance parcourt-elle à la même vitesse en 1 heure et 20 minutes ?

| Distance (en km) | 42 | $d$ |
|---|---|---|
| Durée (en min) | 50 | 80 |

$$1\text{ h }20\text{ min} = 60\text{ min} + 20\text{ min} = 80\text{ min}$$

$$x = \frac{42 \times 80}{50} = 67,2$$

Lilou parcourt donc 67,2 km en 1 h 20 min.

## ☞ Exercice 5 : ☆☆

1) Dans un garage, la main-d'œuvre coûte 54,10 € de l'heure. Une réparation dure 3 h 12 min. Calculer le coût de la main-d'œuvre :

| Durée (en min) | 60 | 192 |
|---|---|---|
| Coût (en €) | 54,10 | $x$ |

$$3\text{ h }12\text{ min} = 3 \times 60\text{ min} + 12\text{ min} = 192\text{ min}$$

$$x = \frac{192 \times 54,10}{60} = 173,12$$

Le coût de la main-d'œuvre pour une réparation de 3 h 12 min est donc de 173,12 €.

2) Pour le *record du monde de l'heure* (épreuve cycliste sur piste qui consiste à parcourir la plus grande distance possible en une heure) en 2019, le vainqueur a parcouru 34,98 m tous les 4 tours de pédalier. Combien de tours de pédalier a-t-il fait pour parcourir les 55,089 km de son record ?

| Distance (en m) | 34,98 | 55 089 |
|---|---|---|
| Nombre de tours | 4 | $n$ |

$$55,089\text{ km} = 55\ 089\text{ m}$$

$$x = \frac{4 \times 55\ 089}{34,98} \approx 6\ 299$$

Pour parcourir 44,089 km, le vainqueur a effectué environ 6 299 tours de pédalier en 1 h.

## ☞ Exercice 6 : ☆☆

Un professeur de $3^e$ organise pour ses élèves une course sur 2 000 m. Lina, la gagnante, met 7 min pour parcourir cette distance. Son professeur lui demande d'estimer le temps qu'elle mettrait pour faire 3 fois 500 m. En supposant qu'elle court à la même vitesse sur 2 000 m et sur 3 fois 500 m, **quelle réponse donnera Lina ?**

$$3 \times 500 \text{ m} = 1\ 500 \text{ m}$$

| Distance (en m) | 2 000 | 1 500 |
|---|---|---|
| Durée (en min) | 7 | $d$ |

$$d = \frac{1\ 500 \times 7}{2\ 000} = 5,25 \text{ min} = 5 \text{ min} + 0,25 \times 60 \text{ s} = 5 \text{ min } 15 \text{ s}$$

Si elle court à la même vitesse, il faudrait à Lina 5 mintues et 15 secondes pour parcourir 3 fois 500 m.

## ☞ Exercice 7 : ☆☆

Un avion de chasse peut aller à la vitesse maximale de *mach 2,2*. Sachant que *mach 1* équivaut à la vitesse du son (soit environ 340 m/s), **quelle est la vitesse maximale de cet avion en km/h ?**

| Distance en *mach* | 1 | 2,2 |
|---|---|---|
| Distance en *m/s* | 340 | $v$ |

$$v = \frac{2,2 \times 340}{1} = 748 \text{ m/s}$$

$$748 \text{ m/s} = 748 \times 3\ 600 \text{ m/h} = 2\ 692\ 800 \text{ m/h} = 2\ 692\ 800 \div 1\ 000 \text{ km/h} = 2\ 692,8 \text{ km/h}$$

Cet avion peut donc aller à une vitesse maximale de 2 692,8 km/h.

## ☞ Exercice 8 : ☆

Calculer :

1) 45 % de 3 L $= \frac{45}{100} \times 3$ L $= 1,35$ L

2) 6 % de 26 € $= \frac{6}{100} \times 26$ € $= 1,56$ €

3) 13,5 % de 5 kg $= \frac{13,5}{100} \times 5$ kg $= 0,675$ kg

4) 22 % de 150 $= \frac{22}{100} \times 150 = 33$

5) 1,5 % de 82 $= \frac{1,5}{100} \times 82 = 1,23$

6) 0,2 % de 25 $= \frac{0,2}{100} \times 25 = 0,05$

7) 2 % de 45 $= \frac{2}{100} \times 45 = 0,9$

## ☞ Exercice 9 : ☆

Une pomme est constituée à 85 % d'eau. **Quelle masse d'eau est contenue dans une pomme de 150 g ?**

$$85\% \text{ de } 150 \text{ g} = \frac{85}{100} \times 150 = 127,5 \text{ g}$$

Une pomme de 150 g contient donc 127,5 g d'eau.

## ☞ Exercice 10 : ☆

Parmi les 93 élèves de $3^e$ de l'année dernière qui ont passé le DNB (général), 82,8 % l'ont obtenu. **Combien d'élèves cela représente-t-il ?**

$$82,8\% \text{ de } 93 = \frac{82,8}{100} \times 93 \approx 77$$

L'année dernière, 77 élèves de $3^e$ ont obtenu leur DNB général.

## Exercice 11 : ☆

1) On augmente de 22 % un prix de 45 €. Combien vaut-il désormais ?

— On commence par calculer le montant de l'augmentation : 22 % de 45 € $= \frac{22}{100} \times 45$ € $= 9,9$ €.
— On calcule ensuite le nouveau prix : 45 € $+ 9,9$ € $= 54,9$ €.

Après augmentation, cet article coûte désormais 54,9 €.

2) On diminue de 5 % un volume de 310 L. Combien vaut-il désormais ?

— On commence par calculer le montant de la réduction : 5 % de 310 L $= \frac{5}{100} \times 310$ L $= 15,5$ L.
— On calcule ensuite le nouveau volume : 310 L $- 15,5$ L $= 294,5$ L.

Après diminution, ce volume est désormais de 294,5 L.

3) On diminue de 33 % une masse de 71 kg. Combien vaut-elle désormais ?

— On commence par calculer le montant de la réduction : 33 % de 71 kg $= \frac{33}{100} \times 71$ kg $= 23,43$ kg.
— On calcule ensuite la nouvelle masse : 71 kg $- 23,43$ kg $= 47,57$ kg.

Après diminution, cette masse est désormais de 47,57 kg.

4) On augmente de 76 % une charge de 7 t. Combien vaut-elle désormais ?

— On commence par calculer le montant de l'augmentation : 76 % de 7 t $= \frac{76}{100} \times 7$ t $= 5,32$ t.
— On calcule ensuite la nouvelle charge : 7 t $+ 5,32$ t $= 12,32$ t.

Après augmentation, cette charge est désormais de 12,32 t.

## Exercice 12 : ☆

1) Cinq adultes sur huit boivent du café le matin. Exprimer cette proportion en pourcentage :

$$\frac{5}{8} = 0,625 = \frac{62,5}{100} = 62,5\%$$

2) Dans le collège Paul Bert, il y a 455 élèves, dont 123 font espagnol en seconde langue. Calculer le pourcentage des élèves de ce collège faisant espagnol LV2 ?

| | | |
|---|---|---|
| Espagnol LV2 | 123 | $x$ |
| Total | 455 | 100 |

$$x = \frac{100 \times 123}{455} \approx 27$$

Il y a environ 27 % des élèves du collège Paul Bert qui font Espagnol LV2.

## Exercice 13 : ☆☆☆

Une voiture consomme 5,3 itres d'essence aux 100 km. Après un réglage du moteur, elle ne consomme plus que 5,1 litres aux 100 km. **Exprimer la réduction de la consommation d'énergie en pourcentage :**

— Calculons d'abord la quantité d'essence économisée pour 100 km : $5,3$ L $- 5,1$ L $= 0,2$ L économisés.

— Calculons ensuite le pourcentage d'économies réalisées : $\frac{0{,}2}{5{,}3} \times 100 \approx 3,77$.
*(on peut aussi utiliser un tableau de proportionnalité)*

Le réglage du moteur a donc permis de réduire d'environ 3,77 % la consommation de cette voiture.

## ☞ Exercice 14 : ☆☆

On donne la répartition des élèves d'un club :

| | Filles | Garçons |
|---|---|---|
| Enfants | 23 | 17 |
| Adultes | 67 | 68 |

1) Parmi les enfants, quel est le pourcentage de filles ?

Il y a 23 filles parmi les $23 + 17 = 40$ enfants.

$$\frac{23}{40} = 0,575 = \frac{57,5}{100} = 57,5\%$$

Parmi les enfants, 57,5 % sont des filles.

2) Quel est le pourcentage d'enfants de ce club ?

Il y a en tout $40 + 67 + 68 = 175$ personnes dans ce club, dont 40 enfants (voir question précédente).

| | | |
|---|---|---|
| Enfants | 40 | $n$ |
| Total | 175 | 100 |

$$n = \frac{40 \times 100}{175} \approx 22,9$$

Parmi les menbres du club, environ 22,9 % sont des enfants.

3) Trois collégiennes de 12 ans viennent de s'inscrire dans ce club. Quel est désormais le pourcentage d'enfants filles dans ce club ?

Il y a désormais $175 + 3 = 178$ membres dans ce club dont $23 + 3 = 26$ enfants filles.

$$\frac{26}{178} \approx 0,146 = \frac{14,6}{100} = 14,6\%$$

Désormais parmi les menbres du club, environ 14,6 % sont des enfants filles.

## ☞ Exercice 15 : ☆☆

*D'après DNB Métropole 2021 :*

1) La température moyenne à Tours en 2009 était de 11,9°C. En 2019, elle était de 13,1°C *(d'après les questions précédentes du sujet)*.
Le pourcentage d'augmentation entre 2009 et 2019, arrondi à l'unité, est-il de : 7 % ; 10 % ou 13 % ? Justifier la réponse.

Le plus simple est de tester les 3 possibilités :

- ☞ $7\%$ de $11,9°C = \frac{7}{100} \times 11,9 = 0,833°C$ et $11,9°C + 0,833°C = 12,733°C \approx 12,7°C$ : ce n'est pas 7 %.
- ☞ $10\%$ de $11,9°C = \frac{10}{100} \times 11,9 = 1,19°C$ et $11,9°C + 1,19°C = 13,09°C \approx 13,1°C$ : c'est bien 10 %.
- ☞ $13\%$ de $11,9°C = \frac{13}{100} \times 11,9 = 1,547°C$ et $11,9°C + 1,547°C = 13,447°C \approx 13.4°C$ : ce n'est pas 13 %.

L'augmentation de la température à Tours entre 2009 et 2019 est donc d'environ 10 %.

2) La production annuelle de déchets par Français était de 5,2 tonnes par habitant en 2007. Entre 2007 et 2017, elle a diminué de 6,5 %. De combien de tonnes la production annuelle de déchets par Français n 2017 a-t-elle diminué par rapport à l'année 2007 ?

$$6,5\% \text{ de } 5,2 \text{ t} = \frac{6,5}{100} \times 5,2 = 0,338 \text{ t}$$

La production annuelle de déchets par Français a donc diminué de 0,339 tonnes entre 2007 et 2017 (soit 338 kg).

☞ **Exercice 16 :** ☆

**⚠EXERCICE IMPORTANT ! ⚠**

Le prix d'un objet a augmenté de 10 % entre 2015 et 2016, puis a subi une baisse de 10 % entre 2016 et 2017.
**Le prix de cet objet est-il revenu au prix initial de 2015 ?**

Prenons un exemple : si l'objet coûtait 50 € en 2015. Il augmente alors de 10 % en 2016 :

☞ Calculons le montant de l'augmentation : 10 % de 50 € $= \frac{10}{100} \times 50$ € $= 5$ €.

☞ Calculons maintenant le prix en 2016 : 50 € + 5 € = 55 €.

En 2016, l'objet coûte donc 55 €. Il est ensuite réduit de 10 % en 2017 :

☞ Calculons le montant de la réduction : 10 % de 55 € $= \frac{10}{100} \times 55$ € $= 5,5$ €.

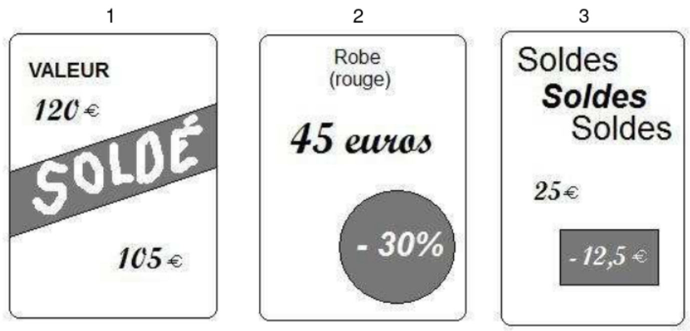
☞ Calculons maintenant le prix en 2017 : 55 € − 5,5 € = 49,5 €.

L'objet coûtait donc 50 € en 2015, 55 € en 2016, et 49,5 €en 2017. Le prix n'est donc **pas** revenu à son montant de 2015 !

**Remarque : C'est un piège classique ! En général, augmenter une valeur d'un certain pourcentage, puis la réduire de ce même pourcentage (ou l'inverse) ne la fait pas revenir à sa valeur initiale ! Tout simplement car on applique pas l'augmentation et la réduction sur la même valeur.**

☞ **Exercice 17 :** ☆☆☆

*D'après DNB Pondichéry 2016 :*
Lors des soldes, Rami, qui accompagne sa mère et s'ennuie un peu, compare trois étiquettes pour passer le temps :




1) Quel est le plus fort pourcentage de remise ?

☞ Premier article : initialement à 120 €, cet article est passé à 105 €. Il a donc reçu une **remise de 15 €** (120 − 105). Calculons cette réduction en pourcentage :

$$\frac{15 \text{ €}}{120 \text{ €}} = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$$

Le premier article a donc une **réduction de 12,5 %**.

☞ Deuxième article : initialement à 45 €, il dispose d'une **réduction de 30 %**. Calculons le montant de la remise en euros :

$$30\% \text{ de } 45 \text{ €} = \frac{30}{100} \times 45 = 13,5 \text{ €}$$

Le deuxième article a donc une **remise de 13,5 €**.

☞ Troisième article : initialement à 25 €, cet article bénéficie d'une **remise de 12,5 €**. Calculons cette réduction en pourcentage :

$$\frac{12,5 \text{ €}}{25 \text{ €}} = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$$

Le troisième article a donc une **réduction de 50 %**.

C'est donc le **3ème article** qui bénéficie de la plus forte réduction en pourcentage.

⚠*L'exercice continue en p.10 !* ⚠

2) Est-ce que la plus forte remise en euros correspond à la plus forte réduction en pourcentage ?

Résumons les résultats trouvés à la question précédente :

| | Remise en € | Réduction en % |
|---|---|---|
| Article 1 | 15 € | 12,5 % |
| Article 2 | 13,5 € | 30 % |
| Article 3 | 12,5 € | 50 % |

Il apparaît alors que l'article 1 est celui qui a la plus forte remise en €, alors qu'il a la plus petite réduction en %. Au contraire, l'article 3 a la plus forte réduction en % et la plus petite remise en €.

Cela s'explique par le fait que les prix initiaux des 3 articles sont différents.

# Mises au Travail