Séquence 6 : Triangles semblables

✎ ✎ ✎ **OBJECTIFS :** ✎ ✎ ✎

À la fin de cette Séquence 6, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Les **deux caractérisations** des triangles semblables.	Cours partie A
La définition d'un facteur d'agrandissement ou de réduction.	Cours partie B)1.
Les propriétés des agrandissements et réductions.	Cours partie B)2.

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Trouver une longueur manquante dans des triangles semblables **grâce à leurs angles**.	n°1, 2	n°3	n°4
Trouver un angle manquant dans des triangles semblables **grâce à leurs longueurs**.	n°4		
Calculer et utiliser un facteur d'agrandissement/de réduction.	n°6	n°7	
Utiliser les propriétés des agrandissements et réductions (en particulier sur les aires).	n°8	n°9	n°10
Exercice type Brevet.			n°11

A) Triangles semblables

1. Rappel sur les angles d'un triangle

Propriété 1 : Somme des angles d'un triangle

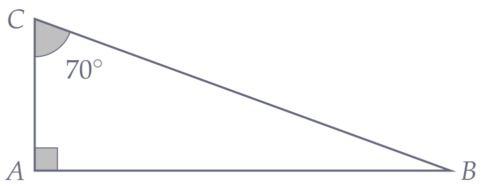
....

Exemple(s) :

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ci-contre :

....

....



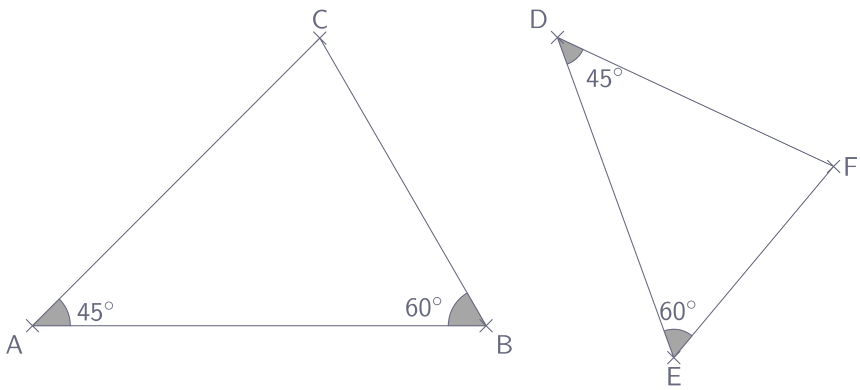
2. Caractérisations

Définition 1 : Caractérisation *par les angles*

....

....

Exemple(s) :



Triangle ABC	Triangle DEF
....	....
....	....
....	....

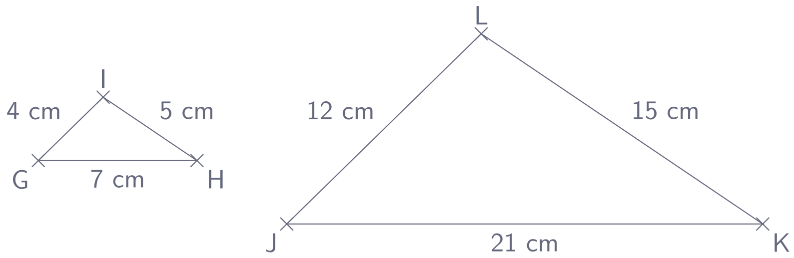
Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux deux à deux, ce sont donc des triangles semblables.

Définition 2 : Caractérisation *par les longueurs*

....

....

Exemple(s) :



Triangle GHI	GH = ...	HI = ...	IG = ...
Triangle JKL	JK = ...	KL = ...	JL = ...

....

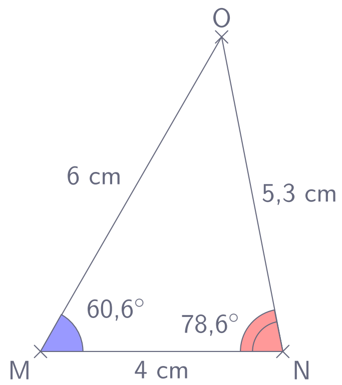
C'est bien un **tableau de proportionnalité** (de coefficient de proportionnalité ...) donc les triangles GHI et JKL sont semblables.

3. Utiliser les triangles semblables pour démontrer

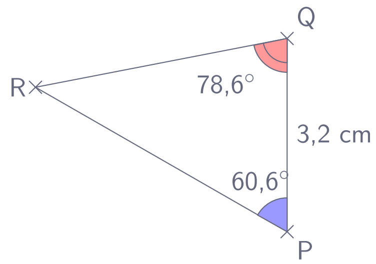
a. Trouver une longueur manquante dans des triangles semblables *grâce à leurs angles.*

Dans le cas où les angles sont connus et que l'on cherche l'une des longueurs, on utilise la **définition 1** pour démontrer que les triangles sont semblables, puis la **définition 2** pour dire que les longueurs sont proportionnelles et ainsi calculer la longueur manquante.

Exemple(s) :



Calculer les longueurs RQ et RP dans le triangle ci-dessous :



Méthode 1 :

1) Montrer que les triangles sont semblables :

....

....

....

....

2) En déduire la (ou les) longueur(s) manquante(s) :

....

....

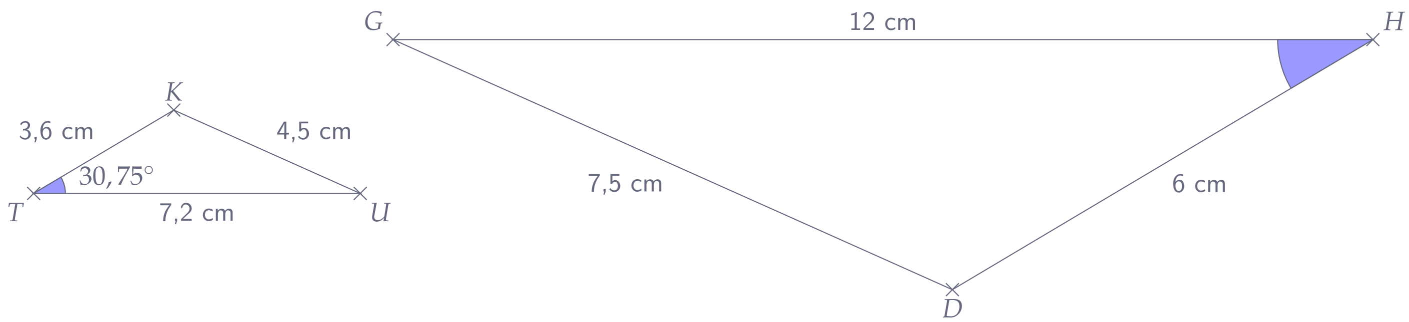
Angle « en face »	$\widehat{MON} = \widehat{PRQ}$	$\widehat{MNO} = \widehat{PQR}$	$\widehat{NMO} = \widehat{QPR}$
Triangle MNO	....	....	....
Triangle PQR	....	....	....

b. Trouver un angle manquant dans des triangles semblables *grâce à leurs longueurs.*

Dans le cas où les angles sont connus et que l'on cherche l'une des longueurs, on utilise la **définition 3** pour démontrer que les triangles sont semblables, puis la **définition 2** pour dire que les angles sont égaux et ainsi en déduire l'angle manquant.

☞ **Exemple(s) :**

Trouver l'angle $\widehat{GDH}$ dans le triangle ci-dessous :



Méthode 2 :

1) Montrer que les triangles sont semblables :

On crée le tableau en triant dans les deux lignes dans l'ordre croissant (ou décroissant, ce qui est important c'est de garder le même ordre), puis on vérifie que l'on a bien un tableau de proportionnalité :

Triangle TUK	....	....	....
Triangle DGH	....	....	....

....

....

....

2) En déduire l'angle manquant :

....

....

....

B) Agrandissement et réduction

1. Facteur d'agrandissement/de réduction

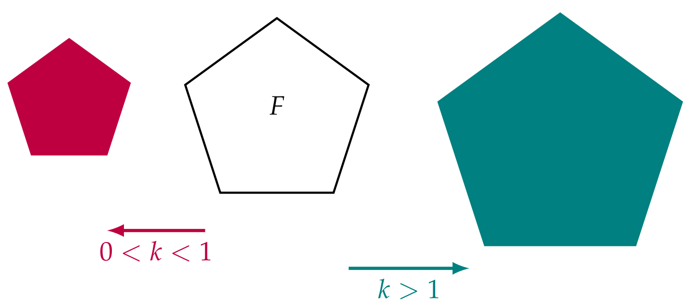
Définition 3 : Agrandissement et réduction

Si, pour une figure F donnée, on multiplie toutes les longueurs par un nombre k strictement positif, alors on obtient :

☞ ....

☞ ....

Remarque : si $k = 1$, alors les deux figures sont identiques.

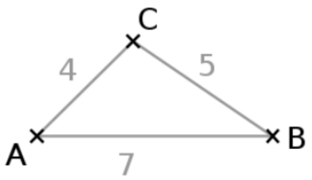


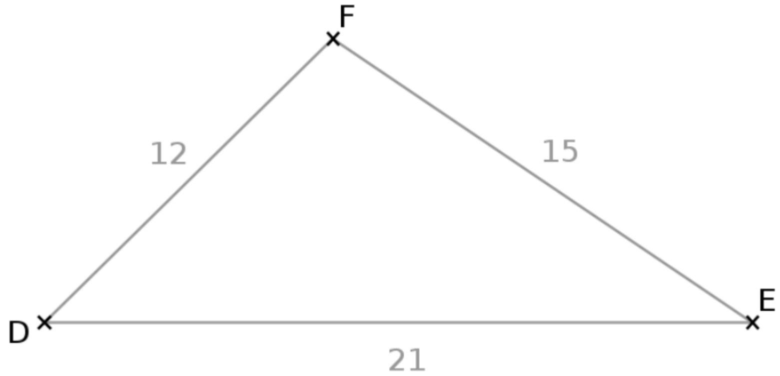
Dans le cas des triangles semblables :

....

....

☞ **Exemple(s) :**





× ......

Triangle ABC	AB =	AC =	BC =
Triangle DEF	DE =	DF =	EF =

÷ ......

On peut donc dire que :

☞ Le triangle DEF est un .... du triangle ABC de facteur ......

☞ Le triangle ABC est une .... du triangle DEF de facteur ......

2. Propriétés des agrandissements et réductions

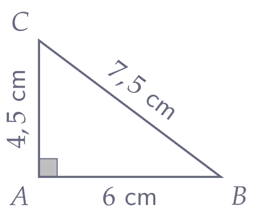
Propriété 2 :

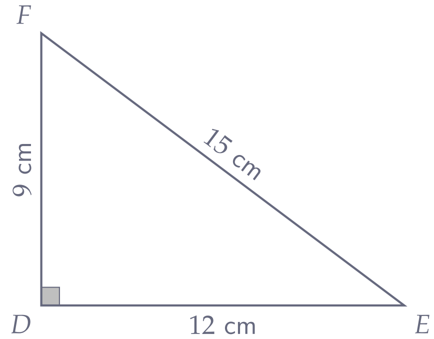
....

....

....

☞ **Exemple(s) :**





1) Complète le tableau ci-dessous :

ABC	....	....	....
DEF	....	....	....

2) Que peut-on dire des triangles ABC et DEF ?

....

3) Calculer les aires de ces deux triangles et les comparer :

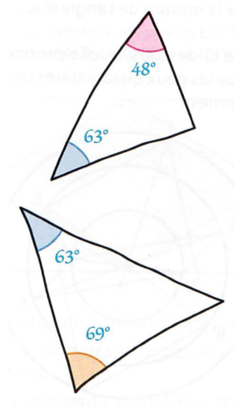
....

....

....

Exercices

Exercice 1 : ☆



Les triangles ci-contre sont-ils semblables ? Justifier.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

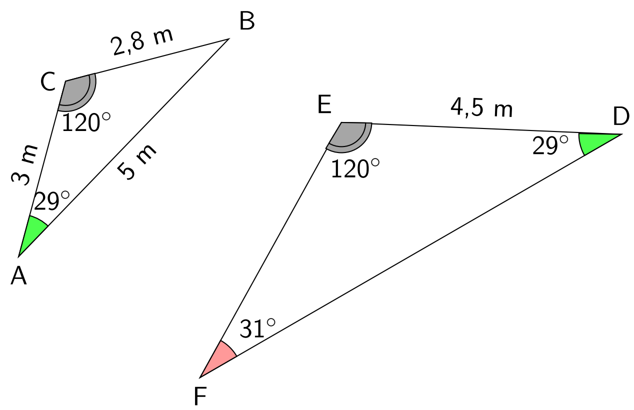
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 2 : ☆



1) Que peut-on dire des triangles ABC et DEF ? Justifier.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2) En déduire les longueurs EF et DF :

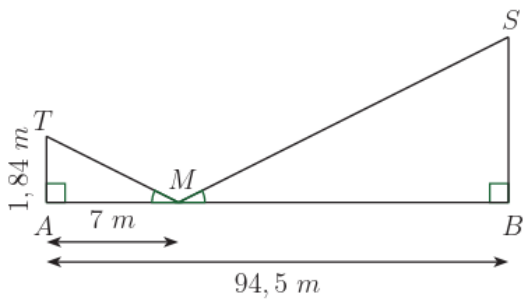
ABC	BC = 2,8 m	. . . .	. . . .
DEF	. . . .	. . . .	. . . .

. . . .

Exercice 3 : ☆☆

Pour estimer la hauteur de l'obélisque de la Concorde à Paris, un touriste mesurant 1,84 m regarde dans un miroir (M) dans lequel il arrive à voir le sommet (S) de l'obélisque. Les angles $\widehat{AMT}$ et $\widehat{BMS}$ ont la même mesure.

Calculer la hauteur de l'obélisque.



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

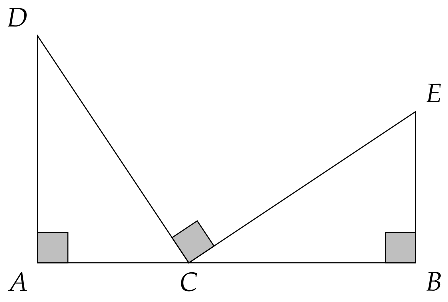
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 4 : ☆☆☆



Les points A, C et B sont alignés.

1) Démontrer que $\widehat{ACD} = \widehat{BEC}$:

....

....

....

2) On donne $AC = 2$ cm, $AD = 4$ cm et $AB = 8$ cm. Calculer BC et BE :

....

....

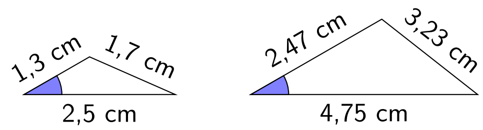
....

....

....

Exercice 5 : ☆

Juliette affirme : « Les angles marqués ont la même mesure. »
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.



....

....

....

....

....

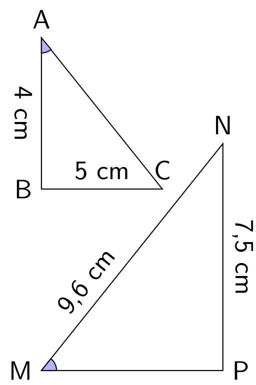
....

....

....

Exercice 6 : ☆

Les triangles ABC et MNP sont semblables.
Calculer le facteur d'agrandissement pour passer de ABC à MNP :



....

....

....

....

....

....

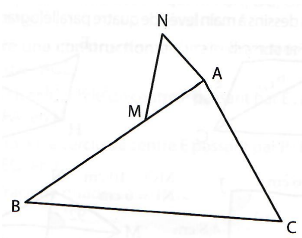
....

....

....

....

Exercice 7 : ☆



On donne les mesures suivantes : $AB = 4,8$ cm ; $AC = 3,6$ cm ; $BC = 5,7$ cm
$AN = 1,2$ cm ; $AM = 1,6$ cm ; $MN = 1,9$ cm

1) Expliquer pourquoi les triangles ABC et AMN sont semblables.

....

....

....

2) Déterminer le facteur de réduction pour passer de ABC à AMN.

....

....

Exercice 8 : ☆

Lors d'une réduction, les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{3}$. Par quel coefficient sont multipliées les aires ?

....

....

....

Exercice 9 : ☆☆

Si on divise toutes les longueurs d'une figure par 2, par quel coefficient est multipliée son aire ?

....

....

....

Exercice 10 : ☆☆☆

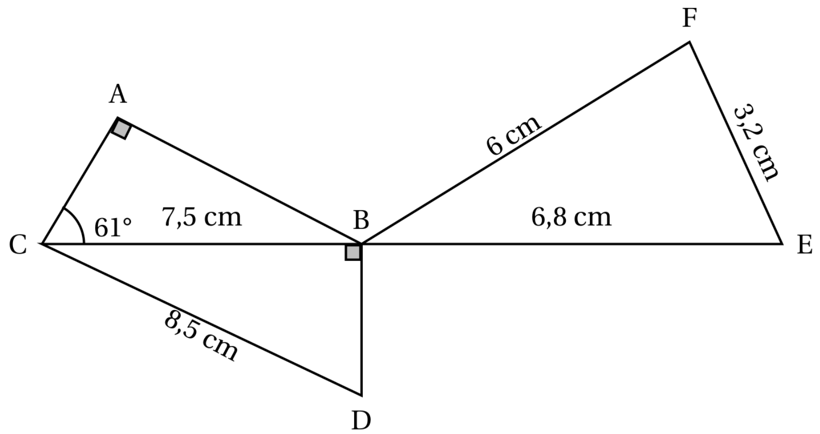
Si l'aire d'une figure est multipliée par $0,81$, par combien sont multipliées les longueurs des côtés ?

....

....

....

Exercice 11 : ☆☆☆



D'après DNB Métropole 2018.

La figure ci-contre n'est pas représentée en vraie grandeur.
Les points C, B et E sont alignés.
Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle BDC est rectangle en B.

1) Montrer que la longueur BD est égale à 4 cm.

....

....

....

....

....

....

2) Montrer que les triangles CBD et BFE sont semblables.

....

....

....

....

3) Sophie affirme que l'angle $\widehat{BFE}$ est un angle droit. A-t-elle raison ?

....

....

Mises au Travail