Séquence 6 : Triangles semblables

OBJECTIFS :

À la fin de cette Séquence 6, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Les **deux caractérisations** des triangles semblables.	Cours partie A
La définition d'un facteur d'agrandissement ou de réduction.	Cours partie B)1.
Les propriétés des agrandissements et réductions.	Cours partie B)2.

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Trouver une longueur manquante dans des triangles semblables **grâce à leurs angles**.	n°1, 2	n°3	n°4
Trouver un angle manquant dans des triangles semblables **grâce à leurs longueurs**.	n°4		
Calculer et utiliser un facteur d'agrandissement/de réduction.	n°6	n°7	
Utiliser les propriétés des agrandissements et réductions (en particulier sur les aires).	n°8	n°9	n°10
Exercice type Brevet.			n°11

A) Triangles semblables

1. Rappel sur les angles d'un triangle

Propriété 1 : Somme des angles d'un triangle

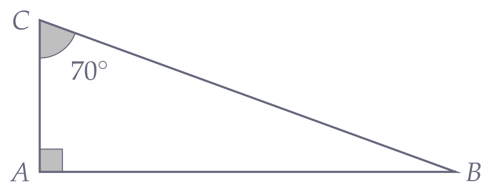
Dans un triangle, la somme des angles fait toujours $180°$.

Exemple(s) :

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ci-contre :

On sait que $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180°$, donc :

$\widehat{ABC} = 180° - (90° + 70°) = 180° - 160° = \mathbf{20}°$.

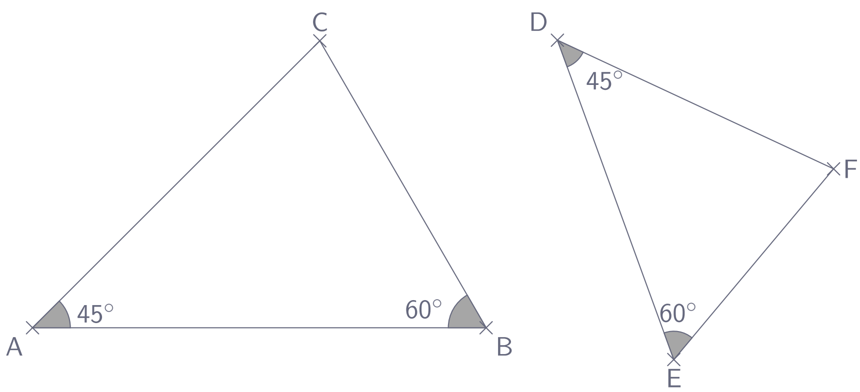


2. Caractérisations

Définition 1 : Caractérisation *par les angles*

Deux triangles sont semblables si leurs angles sont **deux à deux égaux**.

Exemple(s) :



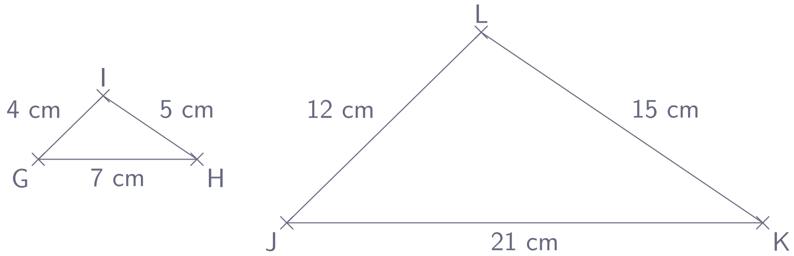
Triangle ABC	Triangle DEF
$\widehat{BAC} = 45°$	$\widehat{EDF} = 45°$
$\widehat{ABC} = 60°$	$\widehat{DEF} = 60°$
$\widehat{ACB} = 75°$	$\widehat{DFE} = 75°$

Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux deux à deux, ce sont donc des triangles semblables.

Définition 2 : Caractérisation *par les longueurs*

Deux triangles sont semblables si leurs longueurs sont **deux à deux proportionnelles**.

Exemple(s) :



Triangle GHI	GH = 7	HI = 5	IG = 4
Triangle JKL	JK = 21	KL = 15	JL = 12

$$\frac{21}{7} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4} = 3$$

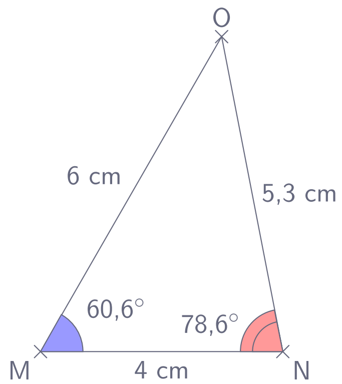
C'est bien un **tableau de proportionnalité** (de coefficient de proportionnalité 3) donc les triangles GHI et JKL sont semblables.

3. Utiliser les triangles semblables pour démontrer

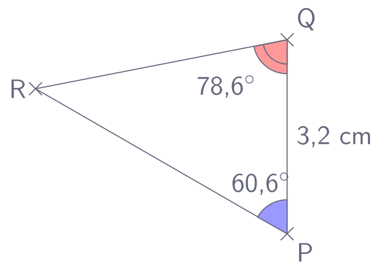
a. Trouver une longueur manquante dans des triangles semblables *grâce à leurs angles*.

Dans le cas où les angles sont connus et que l'on cherche l'une des longueurs, on utilise la **définition 1** pour démontrer que les triangles sont semblables, puis la **définition 2** pour dire que les longueurs sont proportionnelles et ainsi calculer la longueur manquante.

Exemple(s) :



Calculer les longueurs RQ et RP dans le triangle ci-dessous :



Méthode 1 :

1) Montrer que les triangles sont semblables :

Les triangles MNO et PQR ont deux angles communs :

$$\widehat{NMO} = \widehat{QPR} = 60,6^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{MNO} = \widehat{PQR} = 78,6^\circ$$

Comme la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°, les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{PRQ}$ sont également égaux. Les triangles MNO et PQR ont leurs angles deux à deux égaux, ils sont donc semblables.

2) En déduire la (ou les) longueur(s) manquante(s) :

On sait que si deux triangles sont semblables, alors leurs longueurs sont proportionnelles deux à deux. Il faut donc construire un tableau de proportionnalité :

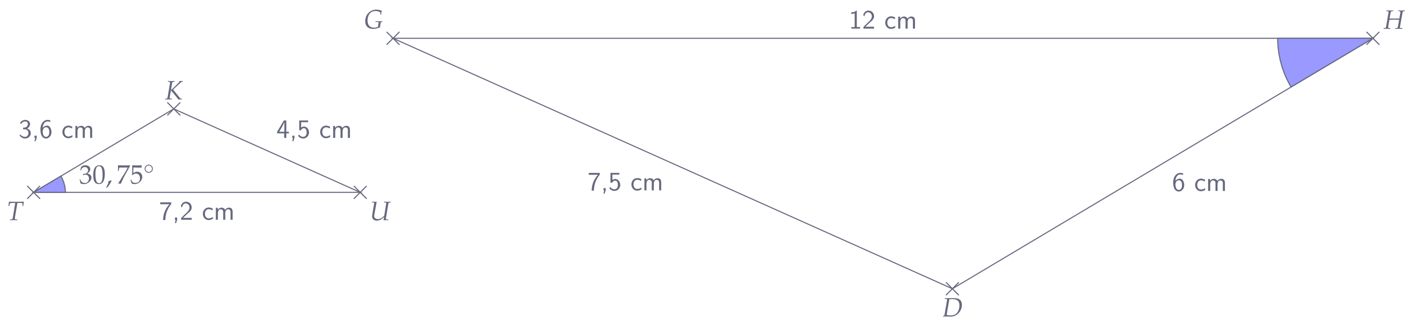
Angle « en face »	$\widehat{MON} = \widehat{PRQ}$	$\widehat{MNO} = \widehat{PQR}$	$\widehat{NMO} = \widehat{QPR}$
Triangle MNO	4 cm	6 cm	5,3 cm
Triangle PQR	3,2 cm $= 4 \times \mathbf{0,8}$	$6 \times 0,8 = \mathbf{4,8}$ cm	$5,3 \times 0,8 = \mathbf{4,24}$ cm

b. Trouver un angle manquant dans des triangles semblables *grâce à leurs longueurs.*

Dans le cas où les angles sont connus et que l'on cherche l'une des longueurs, on utilise la **définition 3** pour démontrer que les triangles sont semblables, puis la **définition 2** pour dire que les angles sont égaux et ainsi en déduire l'angle manquant.

☞ **Exemple(s) :**

Trouver l'angle $\widehat{GDH}$ dans le triangle ci-dessous :



Méthode 2 :

1) Montrer que les triangles sont semblables :

On crée le tableau en triant dans les deux lignes dans l'ordre croissant (ou décroissant, ce qui est important c'est de garder le même ordre), puis on vérifie que l'on a bien un tableau de proportionnalité :

Triangle TUK	3,6 cm	4,5 cm	7,2 cm
Triangle DGH	6 cm	7,5 cm	12 cm

$$\frac{3,6}{6} = \mathbf{0,6} \quad \text{et} \quad \frac{4,5}{7,5} = \mathbf{0,6} \quad \text{et} \quad \frac{7,2}{12} = \mathbf{0,6}$$

Il s'agit bien d'un tableau de proportionnalité, donc les triangles TUK et DGH sont semblables.

2) En déduire l'angle manquant :

On sait que si deux triangles sont semblables, alors leurs angles sont deux à deux égaux. On a donc :

$$\widehat{GDH} = \widehat{UTK} = \mathbf{30,75}°$$

B) Agrandissement et réduction

1. Facteur d'agrandissement/de réduction

Définition 3 : Agrandissement et réduction

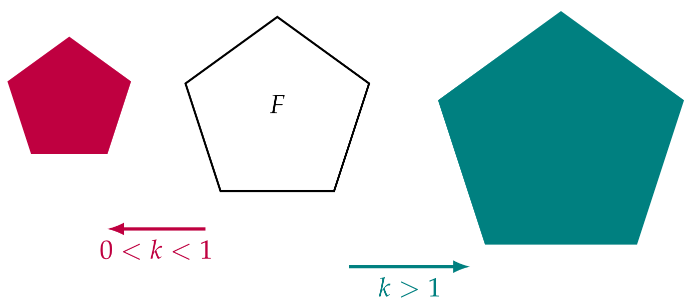
Si, pour une figure F donnée, on multiplie toutes les longueurs par un nombre k strictement positif, alors on obtient :

- ☞ un **agrandissement** si $k > 1$;
- ☞ une **réduction** si $0 < k < 1$.

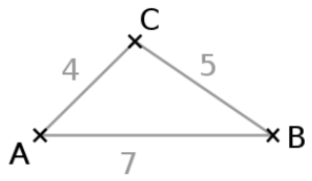
Remarque : si $k = 1$, alors les deux figures sont identiques.

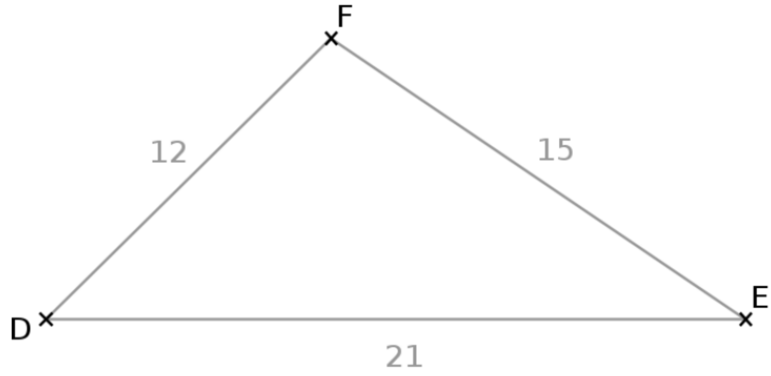
Dans le cas des triangles semblables :

k est le **coefficient de proportionnalité** du tableau. Selon le cas, il est appelé **facteur d'agrandissement** ou **facteur de réduction**.



Exemple(s) :





$\times 3$

Triangle ABC	AB = 7	AC = 4	BC = 5
Triangle DEF	DE = 21	DF = 12	EF = 15

$\div 3$

On peut donc dire que :

- Le triangle DEF est un **agrandissement** du triangle ABC de facteur **3**.
- Le triangle ABC est une **réduction** du triangle DEF de facteur $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

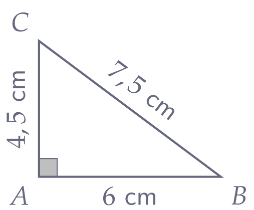
2. Propriétés des agrandissements et réductions

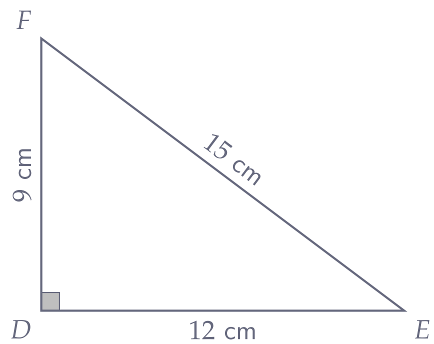
Propriété 2 :

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de facteur k :

- Les **angles** et le **parallélisme** sont **conservés** ;
- Les **aires** sont multipliées par $\mathbf{k^2}$.

Exemple(s) :





1) Complète le tableau ci-dessous :

ABC	4,5 cm	6 cm	7,5 cm
DEF	9 cm	12 cm	15 cm

2) Que peut-on dire des triangles ABC **et** DEF **?**

DEF est un **agrandissement** de ABC de facteur 2.

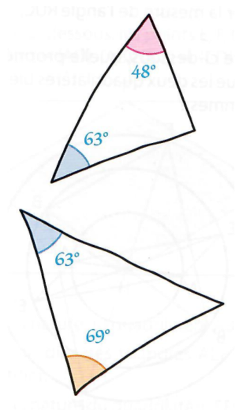
3) Calculer les aires de ces deux triangles et les comparer :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{4,5 \times 6}{2} = \mathbf{13,5\ cm}^2 \qquad \mathcal{A}_{DEF} = \frac{9 \times 12}{2} = \mathbf{54\ cm}^2$$

On remarque que $\mathcal{A}_{DEF} = 4 \times \mathcal{A}_{ABC}$, l'aire de DEF est donc égale à celle de ABC multipliée par $4 = 2^2$.

Exercices

Exercice 1 : ☆



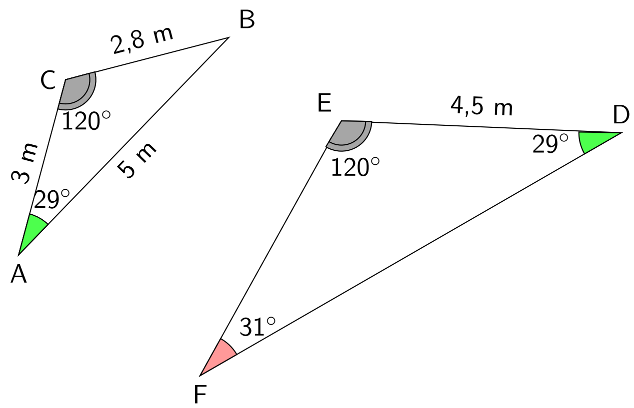
Les triangles ci-contre sont-ils semblables ? Justifier.

La somme des angles d'un triangle est toujours égale à $180°$. Calculons donc les angles manquants :

- Triangle du haut : Angle manquant $= 180° - (63° + 48°) = 180° - 111° = 69°$.
- Triangle du bas : Angle manquant $= 180° - (63° + 69°) = 180° - 132° = 48°$.

Les deux triangles ont leurs angles deux à deux égaux (48°, 63° et 69°), **ce sont donc bien des triangles semblables**.

Exercice 2 : ☆



1) Que peut-on dire des triangles ABC et DEF ? Justifier.

Les triangles ABC et DEF ont deux angles égaux deux à deux (29° et 120°), ce sont donc des **triangles semblables**. Donc leurs longueurs sont deux à deux proportionnelles.

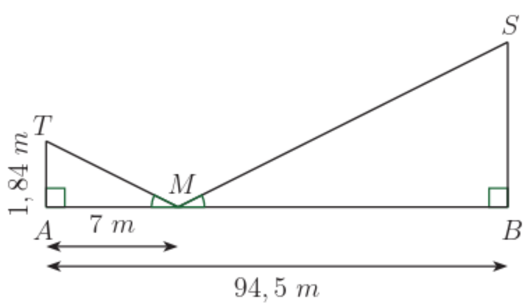
2) En déduire les longueurs EF et DF :

ABC	BC = 2,8 m	AC = 3 m	AB = 5 m
DEF	EF $= \dfrac{2{,}8 \times 4{,}5}{3} = 4{,}2$	ED = 4,5 m	DF $= \dfrac{5 \times 4{,}5}{3} = 7{,}5$ m

On a donc : $EF = 4,2$ m et $DF = 7,5$ m

Exercice 3 : ☆☆

Pour estimer la hauteur de l'obélisque de la Concorde à Paris, un touriste mesurant 1,84 m regarde dans un miroir (M) dans lequel il arrive à voir le sommet (S) de l'obélisque. Les angles $\widehat{AMT}$ et $\widehat{BMS}$ ont la même mesure.
Calculer la hauteur de l'obélisque.

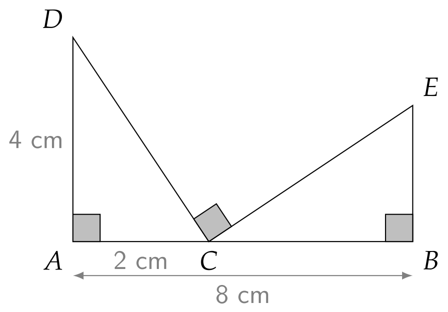


Les triangles AMT et BMS ont deux angles égaux deux à deux ($\widehat{AMT} = \widehat{BMS}$ d'après l'énoncé ; et $\widehat{MAT} = \widehat{MBS} = 90°$ d'après les codages). Ce sont donc des triangles semblables. Or deux triangles semblables ont leurs longueurs proportionnelles deux à deux :

Triangle AMT	$AM = 7$ m	$AT = 1,84$ m
Triangle AMT	$BM = 94,5 - 7 = 87,5$ m	$BS = \dfrac{1,84 \times 87,5}{7} = 23$ m

L'obélisque de la Concorde mesure donc **23 m** de haut.

Exercice 4 : ☆☆☆



Les points A, C et B sont alignés.

1) Démontrer que $\widehat{ACD} = \widehat{BEC}$:

La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.
Donc $\widehat{BCE} + \widehat{BEC} = 90°$ et $\widehat{ACD} + \widehat{BCE} = 90°$ (car A, C et B sont alignés), donc $\widehat{ACD} = \widehat{BEC}$.

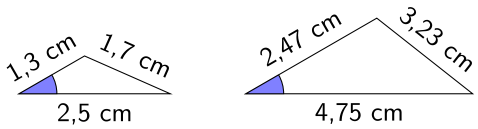
2) On donne $AC = 2$ cm, $AD = 4$ cm et $AB = 8$ cm. Calculer BC et BE :

Les triangles ACB et DEC ont deux angles égaux, ils sont donc semblables, donc leurs longueurs sont proportionnelles :

Triangle ACD	$AC = 2$ cm	$AD = 4$ cm
Triangle BCE	$BC = 8 - 2 = 6$ cm	$BE = \dfrac{4 \times 6}{2} = 12$ cm

Exercice 5 : ☆

Juliette affirme : « Les angles marqués ont la même mesure. »
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

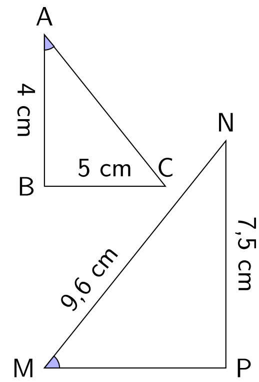


$$\frac{2,47}{1,3} = 1,9 \quad \text{et} \quad \frac{3,23}{1,7} = 1,9 \quad \text{et} \quad \frac{4,75}{2,5} = 1,9$$

Les longueurs des triangles sont deux à deux proportionnelles, donc les triangles sont semblables, donc leurs angles sont deux à deux égaux. Donc **Juliette a raison**.

Exercice 6 : ☆

Les triangles ABC et MNP sont semblables.
Calculer le facteur d'agrandissement pour passer de ABC à MNP :

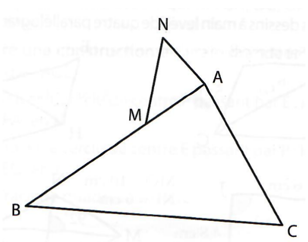


On compare les côtés situés face à l'angle marqué :

$$\frac{7,5}{5} = 1,5$$

Le facteur d'agrandissement pour passer de ABC à MNP est donc de **1,5**.

Exercice 7 : ☆



On donne les mesures suivantes : $AB = 4,8$ cm ; $AC = 3,6$ cm ; $BC = 5,7$ cm
$AN = 1,2$ cm ; $AM = 1,6$ cm ; $MN = 1,9$ cm

1) Expliquer pourquoi les triangles ABC et AMN sont semblables.

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1,2}{3,6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1,6}{4,8} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1,9}{5,7} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Les longueurs des triangles sont deux à deux proportionnelles, donc les triangles sont semblables.

2) Déterminer le facteur de réduction pour passer de ABC à AMN.

D'après la question 1, le rapport de réduction pour passer de ABC à AMN est $\frac{1}{3} \approx 0,33$.

Exercice 8 : ☆

Lors d'une réduction, les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{3}$. Par quel coefficient sont multipliées les aires ?

Le facteur de réduction est $k = \frac{2}{3}$, donc les aires sont multipliées par $k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Les aires sont donc multipliées par $\frac{4}{9}$ lors d'une réduction de facteur $\frac{2}{3}$.

Exercice 9 : ☆☆

Si on divise toutes les longueurs d'une figure par 2, par quel coefficient est multipliée son aire ?

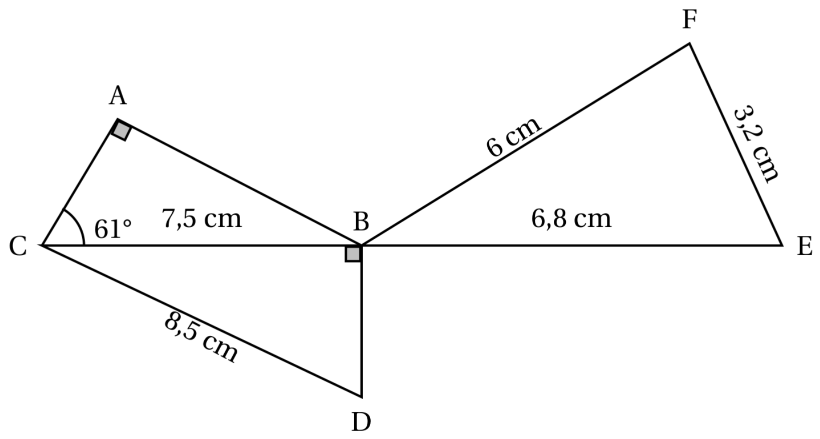
Le facteur de réduction est $k = 0,5$, donc son aire est multipliée par $k^2 = 0,5^2 = \mathbf{0,25}$.

Exercice 10 : ☆☆☆

Si l'aire d'une figure est multipliée par $0,81$, par combien sont multipliées les longueurs des côtés ?

Si le facteur de réduction est k, on sait que l'on a $k^2 = 0,81$. Donc nécessairement $k = \sqrt{0,81} = \mathbf{0,9}$.

Exercice 11 : ☆☆☆



D'après DNB Métropole 2018.

La figure ci-contre n'est pas représentée en vraie grandeur.
Les points C, B et E sont alignés.
Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle BDC est rectangle en B.

1) Montrer que la longueur BD est égale à 4 cm.

D'après le **théorème de Pythagore** dans le triangle **BCD rectangle en B** :

$$CD^2 = BC^2 + BD^2$$
$$8,5^2 = 7,5^2 + BD^2$$
$$72,25 = 56,25 + BD^2$$
$$BD^2 = 72,25 - 56,25$$
$$BD^2 = 16$$
$$BD = \sqrt{16}$$
$$\boxed{BD = 4 \text{ cm}}$$

2) Montrer que les triangles CBD et BFE sont semblables.

CBD	$CD = 8,5$ cm	$BC = 7,5$ cm	$BD = 4$ cm
BFE	$BE = 6,8$ cm	$FB = 6$ cm	$FE = 3,2$ cm

$$\frac{8,5}{6,8} = 1,25 \quad \text{et} \quad \frac{7,5}{6} = 1,25 \quad \text{et} \quad \frac{4}{3,2} = 1,25$$

C'est bien un tableau de proportionnalité, donc **les triangles** CBD **et** BFE **sont semblables**.

3) Sophie affirme que l'angle $\widehat{BFE}$ est un angle droit. A-t-elle raison ?

Nous savons que CBD et BFE sont des triangles semblables. Leurs angles sont donc égaux deux à deux. On a donc :
$\widehat{BFE} = \widehat{CBD} = 90°$
$\widehat{\text{BFE}}$ est bien un angle droit.

Mises au Travail

.... | ....