150 Diverses factorisations de matrices. Applications.

Notations : * $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

* $T_{n\,S/I}^{++}(\mathbb{K})$: triangulaires $\substack{\text{sup.}\\\text{inf.}}$ à coefs diagonaux (strictement) positifs.
* $S_n^{++}(\mathbb{K})$: symétriques (définies) positives.
* $GL_n(\mathbb{K})$: inversibles.
* $SL_n(\mathbb{K})$: de déterminant 1.
* $O_n(\mathbb{K})$: orthogonales.

I Systèmes générateurs.

Déf 1 : Matrices de :

* Transvection : $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{ij}$ avec $i,j \in [\![1;n]\!]$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
* Dilatation : $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1) E_{ii}$ avec $i \in [\![1;n]\!]$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$.

Ppté 2 :

* $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$ et $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$
* $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(1/\alpha)$ et $\det(D_i(\alpha)) = \alpha$

Thm 3 :

① $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par l'ens. des transvections.

② $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par l'ens. des transvections et dilatations.

Exemple 4 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = D_1(-1) \cdot T_{12}(3) \cdot D_2(-5) \cdot T_{21}(2)$$

Application 5 :

$SL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

⚠ Pas $GL_n(\mathbb{R})$! (2 comp. connexes selon signe du déterminant).

II Factorisations et matrices triangulaires

Thm 6 : Factorisation LU

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = LU$ avec :

→ L triang. inf. à diag. unité

→ U triang. sup.

ssi les déterminants principaux de A sont non nuls. Dans ce cas, cette décomposition est unique.

Thm 7 : Factorisation de Cholesky

$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ admet une unique décomposition $A = {}^tPP$ avec $P \in T_{n\,S}^{++}(\mathbb{R})$.

Application 8 :

→ Calculs de déterminant

→ Résolution de syst. linéaires.

Exemple 9 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

① Décomposition de Cholesky de A

② Résoudre le syst. lin. $Ax = b$.

Thm 10 : Factorisation QR

$A \in GL_n(\mathbb{R})$ admet une unique décomp. $A = QR$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_{n\,S}^{++}(\mathbb{R})$.

III Factorisations via la diagonalisation

Thm 11 : Décomposition polaire

$A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 12 :

$O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Thm 13 : Généralisation de 11 :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose comme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

Rmq : On perd l'unicité, et S peut être dégénérée.

Thm 14 : Dunford multiplicative :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tq son polynôme caractéristique soit scindé dans $\mathbb{K}$. Alors A se décompose comme :

$$A = DU = UD \quad \text{(de manière unique)}$$

avec :

→ D inversible et diagonalisable

→ U unipotente.

Application 15 :

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.