201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I Suites récurrentes d'ordre 1.

Définition et exemples :

Déf 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 s'il existe I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ tq : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Exemple 2 : $a, q \in \mathbb{K}$

- arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + a$
- géométriques : $u_{n+1} = q \cdot u_n$
- arithmético-géométriques : $u_{n+1} = q \cdot u_n + a$
- homographiques : $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tq $ad-bc \neq 0$. $u_{n+1} = \dfrac{a\cdot u_n + b}{c \cdot u_n + d}$

Rmq : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est définie que si I est stable par f !

Exercice 3 : Comment s'habiller pour l'apocalypse ?

- Beau un jour $\Rightarrow$ proba $p_1 \in]0;1[$ qu'il fasse beau le lendemain.
- Mauvais un jour $\Rightarrow$ proba $p_2 \in]0;1[$ qu'il fasse mauvais le lendemain.

La proba qu'il fasse beau à la fin des temps dépend-elle du temps qu'il fait aujourd'hui ?

2 Propriétés et approximation :

Thm 4 :

- f croissante sur $I \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone.
- f décroissante sur $I \Rightarrow (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monotones de sens de variation opposés.
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in I \\ f \text{ continue en } I \end{array}\right\} \Rightarrow f(\ell) = \ell$

Thm 5 : du point fixe :
(E,d) un espace métrique complet.
$f : E \to E$ contractante.
Alors f admet un unique point fixe et tte suite tq $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

Thm/Déf 6 : f de point fixe $\ell \in \mathring{I}$ et dérivable en ℓ.

- $|f'(\ell)| < 1 \Rightarrow \ell$ est un pt fixe attractif et $\exists V$ un voisinage de ℓ tq si $u_0 \in V$, (u_n) est définie et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- $|f'(\ell)| > 1 \Rightarrow \ell$ est un pt fixe répulsif si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors (u_n) est stationnaire.

Application 7 : Méthode de Newton.
$a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
si possible, on définit : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} u_0 \in [a,b] \\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

(1) Soit $\alpha \in]a,b[$ tq $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$.
Alors $\exists F$ voisinage de α tq $\forall x_0 \in F$, $(x_n)_n$ est bien définie et cv vers α.

(2) supposons $f(a)f(b) < 0$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x)f''(x) \neq 0$

ⓐ $\forall x_0 \in [a,b[$ tq $f(x_0)f''(x_0) > 0$, $(x_n)_n$ est bien définie, monotone et cv vers α.

ⓑ Majoration de l'erreur d'approximation :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq (b-a)\left[(b-a)\cdot \dfrac{M_2}{2m_1}\right]^{2^n-1}$
avec $m_1 = \inf\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

II Autres types de récurrence.

Exemple 8 :

- $u_{n+1} = f_n(u_n)$ (comme $n!$)
- Intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$

Déf. 9 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre $k \in \mathbb{N}$ s'il existe $f : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}$ tq : $\begin{cases} u_0, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{K} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+k} = f(u_n, \dots, u_{n+k-1}) \end{cases}$

Thm 10 : $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ f \text{ continue en } (\ell,\dots,\ell) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\ell,\dots,\ell) = \ell$

Thm/Déf 11 : Dans le cas linéaire :
$u_{n+k} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i}$ $(a_i \in \mathbb{K})$.
Équation caractéristique : $X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_0 = 0$ de racines $r_1, \dots, r_q$ de multiplicité $m_1, \dots, m_q$.
Alors les suites vérifiant la récurrence sont de la forme :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_q(n) r_q^n$
avec $\forall i \in [\![1;q]\!]$, $P_i \in \mathbb{K}_{m_i-1}[X]$

Application 12 :

- Expression explicite de Fibonacci : $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$
- $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, $\lambda > 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$:
$u_{n+2} = \lambda \sqrt{u_{n+1} u_n}$