267

La fonction Gamma.

Historique / motivation :
- Prolongat° de la notion de factorielle à $\mathbb{R}$, voire à $\mathbb{C}$.
- Intervient dans le calcul de nbses transformées de Laplace (généralisat° de Fourier) → équa dif.
- D'abord introduite par Euler en 1729 comme limite d'un pdt.

Définition :

$$\Gamma :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt$$

Propriété :
Γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve : (poly orange T.Meyre p.82)

* Bien définie : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On veut mq $\Gamma(x)$ est bien défini.
  - $e^{-t}\cdot t^{x-1}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Il reste à étudier la cv de l'intégrale impropre en 0 et en $+\infty$.
  - $e^{-t}\cdot t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$
    et $x>0 \Rightarrow -x<0 \Rightarrow 1-x<1$ donc par comparaison avec l'intégrale de Riemann, nous avons la cv de notre intégrale en 0^+.
  - $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t} = 0 \Rightarrow \exists T>0$ tq $\forall t \geq T$, $t^{x-1}\cdot e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$
    avec $2>1$, donc par comparaison avec l'intégrale de Riemann, ns avons la cv de notre intégrale en $+\infty$.

* Continue :
  Pb : $\forall x>0$, $\forall t \in]0;1]$, si on essaie de majorer $e^{-t}\cdot t^{x-1}$, le + petit majorant est $\sup_{x>0} e^{-t}\cdot t^{x-1} = \frac{e^{-t}}{t}$ qui n'est pas intégrable !
  On ne peut alors pas appliquer le thm de continuité !
  On ruse en utilisant le fait que la continuité est une propriété locale :

  Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tq $a<b$.
  - $(x,t) \mapsto e^{-t}\cdot t^{x-1}$ est continue sur $[a,b]\times\mathbb{R}_+^*$.
  - De plus : $a-1 \leq x-1 \leq b-1$

$$\begin{cases} |e^{-t}\cdot t^{x-1}| \leq e^{-t}\cdot t^{a-1} & \text{si } t<1 \\ |e^{-t}\cdot t^{x-1}| \leq e^{-t}\cdot t^{b-1} & \text{si } t>1 \end{cases}$$

D'où : $|e^{-t}\cdot t^{x-1}| \leq \underbrace{(t^{a-1}+t^{b-1})\cdot e^{-t}}_{\text{intégrable sur }]0;+\infty[\text{ (voir "bien déf.")}}$

Par application du thm de continuité :

Γ est continue sur $[a;b]$.

Ainsi $\forall x>0$, on peut l'encadrer dans un intervalle $[a,b]$, donc Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. ☑

__Propriété :__

(1) $\Gamma(1)=1$

(2) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$

(3) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$

__Preuve :__

(1) $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^0\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty}$

$= e^{-0} - \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 1-0=1.$

(2) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u'}\cdot \underbrace{t^{x}}_{v}\,dt \overset{\text{IPP généralisée}}{=} \underbrace{[-e^{-t}\cdot t^{x}]_{0}^{+\infty}}_{0} + x\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt}_{\Gamma(x)}$$

$u=-e^{-t}$

$v'=x\,t^{x-1}$

$\Rightarrow \Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x).$

(3) __Par récurrence sur n :__

* __Initialisation :__

$n=0 \Rightarrow \Gamma(1)=1$ d'après (1)

$=0!$

* __Hérédité :__ Soit $n\in\mathbb{N}$ tq $\Gamma(n+1)=n!$

Alors $\Gamma(n+2)=(n+2)\cdot\Gamma(n+1)$ d'après (2)

$=(n+1)\cdot n!$ par hypothèse de récurrence

$\Rightarrow$ On a bien $\Gamma(n+2)=(n+1)!$

D'où (3). ☑

__Propriété:__

$\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

avec comme convention:

$$\Gamma^{(0)} = \Gamma \quad \text{et} \quad \ln^{(0)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*.$$

__Preuve__: Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$:

* __Initialisation__:
  - On a déjà $\Gamma \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ d'après la première ppté démontrée.
  - $\Gamma^{(0)} = \Gamma$ donc il n'y a rien d'autre à démontrer.

* __Hérédité__: On suppose la ppté vraie au rang $p \in \mathbb{N}$.
  On a donc $\Gamma \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et

$$\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt.$$

- $\forall x \in]0;+\infty[$, $t \longmapsto (\ln t)^p \cdot t^{x-1} e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$.

- $\forall t \in]0;+\infty[$, $f : x \longmapsto (\ln t)^p \cdot t^{x-1} e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a:

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\forall t \in]0;+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|(\ln t)^p \cdot t^{x-1} \times \ln(t) \times e^{-t}\right| = \left|(\ln t)^{p+1} \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\right|$$

$$\leq \varphi_{p+1}(t) \quad \forall x \in [a,b] \subset]0;+\infty[$$

avec $\varphi_p(t) = \begin{cases} |\ln t|^p \cdot t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ |\ln t|^p \cdot e^{-t} \cdot t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

qui est intégrable sur $]0;+\infty[$ car $\begin{cases} \varphi_p(t) \underset{t \to 0}{=} o\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right) \\ \varphi_p(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(e^{-\frac{t}{2}}\right) \end{cases}$

Par le thm de dérivation on a donc:

- $\Gamma^{(p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc Γ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$)
- $\Gamma^{(p)\prime}(x) = \Gamma^{(p+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{p+1} \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$

L'hypothèse de récurrence est donc vraie au rang $p+1$, donc la ppté est vraie $\forall p \in \mathbb{N}$. ☒

__Propriété :__

Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

__Preuve :__ $\forall x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \geq 0$$

donc Γ est convexe.

__Propriété :__

Γ est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

__Définition :__ Soit I un intervalle réel non trivial et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. f est __logarithmiquement convexe__ si $\ln(f)$ est convexe.

__Preuve :__

__Posons__ $g = \ln(\Gamma)$.

$\Rightarrow g' = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$

$\Rightarrow g'' = \dfrac{\Gamma'' \cdot \Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$

On veut mq $g'' \geq 0$, donc que $\Gamma'' \cdot \Gamma - (\Gamma')^2 \geq 0$, donc que $\Gamma'' \cdot \Gamma \geq (\Gamma')^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à

$$f(t) = t^{\frac{x-1}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad g(t) = \ln t \cdot t^{\frac{x-1}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

donne :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) \cdot g(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\, dt} \cdot \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)\, dt}$$

$$\left| \int_0^{+\infty} \ln t \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt} \cdot \sqrt{\int_0^{+\infty} \ln^2 t \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt}$$

$$\Rightarrow \quad |\Gamma''(x)| \leq \sqrt{\Gamma(x)} \cdot \sqrt{\Gamma''(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma''(x)^2 \leq \Gamma(x) \cdot \Gamma''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

d'où le résultat recherché.

Propriété :

$$\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

Preuve :

Lorsque $x \to 0^+$: $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \underbrace{\Gamma(1)}_{\text{car } \Gamma \text{ cont. en } 1} = 1$

$\Rightarrow \quad x\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$. ☒

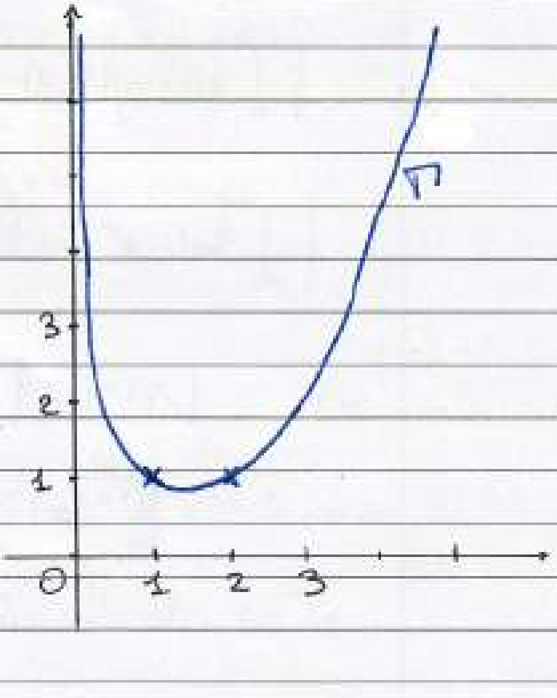
Graphe de Γ :

- On a déjà $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ d'où une idée de son aspect en 0^+.
- $\Gamma(1) = 1$ et $1 = 1 \cdot \Gamma(1) = \Gamma(2)$ ce qui nous donne 2 pts $(1,1)$ et $(2,1)$.
  Donc comme Γ est continue sur $[1;2]$ et dérivable sur $]1;2[$, on a d'après le thm de Rolle :
  $\exists c \in]1;2[$ tq $\Gamma'(c) = 0$
- Γ est convexe donc croissante sur $]c;+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\Gamma(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

  $\Rightarrow \frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{(x-1)\cdot\Gamma(x-1)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \Gamma(x-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

  Donc $\frac{\Gamma(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc le graphe de Γ admet une branche parabolique d'axe (Oy). ☒

Définition : Soit f définie au voisinage de $\pm\infty$.
f possède une branche parabolique :
* d'axe (Oy) : si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$
* d'axe (d) : si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^* \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty \end{cases}$
* d'axe (Ox) : si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.



Exemples :

- d'axe (Oy) : $x \mapsto x^2$
- d'axe (Ox) : $x \mapsto \sqrt{x}$
  $x \mapsto \ln(x)$
- d'axe $y = \frac{x}{2}$: $x \mapsto \frac{x}{2} + \sqrt{x}$

Thm de Bohr-Mollerup :

Γ est l'unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ logarithmique-ment convexe et vérifiant :

$$\begin{cases} \Gamma(1)=1 \\ \Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^* . \end{cases}$$

Preuve : On a déjà montré que Γ satisfait ttes ces conditions.

Soit f une autre fonction vérifiant ces conditions.

- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x+1)=x\,f(x) \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*, f(n+x)=f(x)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \quad (A)$$

(par récurrence sur n).

- De plus, comme $f(1)=1$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(n+1)=n!$
- Ensuite, comme f est logarithmiquement convexe, $\ln(f)$ est convexe et donc :

$\forall(u,v)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall x\in[0;1]$:

$$\ln\left[f(xu+(1-x)v)\right] \leq \overbrace{x\cdot\ln(f(u))}^{\ln(f(u)^x)}+\overbrace{(1-x)\cdot\ln(f(v))}^{\ln(f(v)^{1-x})}$$

Soit par passage à l'exponentielle,

$$\underline{f(xu+(1-x)v) \leq f(u)^x\cdot f(v)^{1-x}}.$$

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on peut écrire $n+x = x\overbrace{(n+1)}^{u}+(1-x)\overbrace{n}^{v}$

d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$:

$$\begin{aligned} f(n+x) \leq f(n+1)^x\cdot f(n)^{1-x} &= (n!)^x\cdot((n-1)!)^{1-x} \\ &= n^x\cdot((n-1)!)^x\cdot((n-1)!)^{1-x} \\ &= n^x\cdot(n-1)! \quad (*) \end{aligned}$$

- $\forall n\in\mathbb{N}$, on peut écrire $n+1 = x\overbrace{(n+x)}^{u}+(1-x)\overbrace{(n+1+x)}^{v}$

d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$:

$$\begin{aligned} n! = f(n+1) &\leq f(n+x)^x\cdot f(n+1+x)^{1-x} \\ &= f(n+x)^x\cdot\left[(n+x)\cdot f(n+x)\right]^{1-x} \\ &= (n+x)^{1-x}\cdot f(n+x) \quad (**) \end{aligned}$$

- Avec $(*)$ et $(**)$ on a :

$$n!\times(n+x)^{x-1} \leq f(n+x) \leq n^x\cdot(n-1)!$$

Soit d'après (A) : $\forall x\in]0;1]$:

$$0\leq n!\cdot(n+x)^{x-1} \leq f(x)\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \leq (n-1)!\cdot n^x \quad (I)$$

- Γ et f vérifient les conditions de l'énoncé et donc vérifient (I), donc par passage à l'inverse on a : $\forall x \in]0;1]$:

$$0 \leq \frac{1}{(n-1)!\, n^{x}} \leq \frac{1}{\Gamma(x)\cdot \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} \leq \frac{1}{n!\cdot (n+x)^{x-1}}$$

Et donc par multiplication (tt est positif) :

$$\frac{\cancel{n!}\cdot (n+x)^{x-1}}{\cancel{(n-1)!}\cdot n^{x-1}} \leq \frac{f(x)\cdot \cancel{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}}{\Gamma(x)\cdot \cancel{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}} \leq \frac{\cancel{(n-1)!}\cdot n^{x-1}}{\cancel{n!}\cdot (n+x)^{x-1}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+x}{n}\right)^{x-1} \leq \frac{f(x)}{\Gamma(x)} \leq \left(\frac{n}{n+x}\right)^{x-1}$$

Et donc quand $n \to +\infty$ on a $f(x) = \Gamma(x)$ $\forall x \in]0;1]$.
Or comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} f(x+1) = x\, f(x) \\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \end{cases}$, cette égalité est vraie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
Γ est donc bien l'unique fonction vérifiant toutes ces conditions.

■

Définition : Fontion Bêta :
$\forall x, y > 0$:
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\,dt$$

Propriété :
$B(x,y)$ est bien définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Preuve :
$x, y > 0 \Rightarrow x-1, y-1 > -1$ donc par Riemann, cette intégrale converge.

Propriété :
$B(x,y) = B(y,x)$ * et $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$ *

Preuve :

$$* \; B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \underset{\substack{T=1-t \\ dT=-dt}}{=} \int_1^0 (1-T)^{x-1}\cdot T^{y-1}(-dT)$$
$$= \int_0^1 T^{y-1}(1-T)^{x-1}\,dT = B(y,x).$$

* $B(x+1,y) = \int_0^1 t^x \cdot (1-t)^{y-1}\,dt$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \cdot (1-t)^x \cdot (1-t)^{y-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{t}{1-t}\right)^x}_{u(t)} \cdot \underbrace{(1-t)^{x+y-1}}_{v'(t)}\,dt$$

<u>IPP</u>:

$$\begin{cases} u'(t) = x \cdot \dfrac{1}{(1-t)^2} \cdot \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{x-1} \\ v(t) = -\dfrac{(1-t)^{x+y}}{x+y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(x+1,y) = \underbrace{\left[-\underbrace{\left(\frac{t}{1-t}\right)^x}_{0 \text{ quand } t=0} \cdot \underbrace{\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}}_{0 \text{ quand } t=1}\right]_0^1}_{0} + \int_0^1 \frac{x}{(1-t)^2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\,dt$$

$$= \frac{x}{x+y}\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} (1-t)^{x+y-2}\,dt$$

$$= \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{\cancel{x}+y-2-\cancel{x}+1}\,dt$$

$$= \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$= \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

$\square$

<u>Théorème</u> : <u>Formule d'Euler-Gauss</u>

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

<u>Preuve</u>:

<u>Lemme</u>: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1}\,dt$$

Alors $\forall x>0$, $\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.

Preuve du lemme :

Notons $\forall t>0$: $g_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1} & \text{si } t\in]0;n] \\ 0 & \text{si } t>n. \end{cases}$

* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CVS vers $g : t \longmapsto e^{-t} \cdot t^{x-1}$.
* $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ sur $[0;n]$ car $\ln(1-u) \leq -u$ (acc. finis)

$\Rightarrow |g_n(t)| \leq e^{-t} \cdot t^{x-1} = g(t)$.

Or g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le thm de cv dominée on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \Gamma(x).$$

Retour à la preuve d'Euler-Gauss :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1}\,dt \underset{\substack{u=\frac{t}{n} \\ n\,du=dt}}{=} \int_0^1 (1-u)^n \cdot (nu)^{x-1}\, n\,du$$

$$= n^x \int_0^1 u^{x-1} \cdot (1-u)^n\,du = \underline{n^x \cdot B(x,n+1)}$$

$$\overset{*}{=} n^x \cdot B(n+1,x) \overset{*}{=} n^x \cdot \frac{n}{n+x} B(n,x)$$

$$= n^x \cdot \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)} B(1,x)$$

Or $B(1,x) = B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$

Donc $I_n(x) = \dfrac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

Et donc avec le lemme on a bien le résultat recherché.

Propriété :

$$\forall x,y>0, \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Preuve :

Lemme :

Pour $x,y>0$ fixés :

$$B(x+n+1,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$$

Preuve du lemme :

$$B(x+n+1,y) = B(y,x+n+1) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x+n}\,dt$$

$$\underset{\substack{t=\frac{u}{n}\\ n\,dt=du}}{=} \int_0^n \left(\frac{u}{n}\right)^{y-1}\cdot\left(1-\frac{u}{n}\right)^{x+n}\cdot\frac{du}{n}$$

$$= \frac{1}{n^y}\int_0^n \underbrace{u^{y-1}\cdot\left(1-\frac{u}{n}\right)^{x+n}}_{h_n(u) \text{ si } u\in]0;n]}\,du$$

$h_n(u)=0$ si $u>n$.

Fixons $x,y>0$.

Pour u fixé, $\left(1-\frac{u}{n}\right)^{x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

→ Donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers $h: u\mapsto u^{y-1}\cdot e^{-u}$.

→ De plus :

$|h_n(u)| \leq u^{y-1}\cdot e^{-u}$ qui est intégrable donc d'après le thm de cv dominée :

$$\int_0^n h_n(u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(y) \quad \text{d'où } B(x+n+1,y)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\Gamma(y)}{n^y}$$

■

Retour à la preuve :

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$B(x+n+1,y) \overset{(*)}{=} \frac{x+n}{x+n+y}B(x+n,y)$$

$$= \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)}B(x,y)$$

D'où :

$$B(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)}{x(x+1)\cdots(x+n)}B(x+n+1,y)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\overbrace{(x+y)(x+y+1)\cdots(x+y+n)}^{\sim\frac{n^{x+y}\cdot n!}{\Gamma(x+y)}}}{\underbrace{x(x+1)\cdots(x+n)}_{\sim\frac{n^x\cdot n!}{\Gamma(x)}}}\cdot\frac{\Gamma(y)}{n^y} = \frac{\cancel{n^{x+y}}\cdot\cancel{n!}}{\Gamma(x+y)}\times\frac{\Gamma(x)}{\cancel{n^x}\cdot\cancel{n!}}\times\frac{\Gamma(y)}{\cancel{n^y}}$$

$$= \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

■

Propriété :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Preuve :

Par la propriété précédente on a :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\underbrace{\Gamma(1)}_{1}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Or $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \int_0^1 \left[t(1-t)\right]^{-\frac{1}{2}} dt$

$t = \sin^2(u)$
$dt = 2\sin(u)\cos(u)$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cancel{\sin(u)}} \times \left(\frac{1}{\underbrace{1-\sin^2(u)}_{\cos^2(u)}}\right)^{1/2} \cdot 2\cancel{\sin(u)} \cdot \cos(u) \, du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cancel{\cos(u)}} \cdot \cancel{\cos(u)} \, du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} 1 \, du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

On a donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ d'où $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ☒

Théorème : Formule de Weierstrass :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = x \cdot e^{\gamma x} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot e^{-\frac{x}{n}}\right]$$

où γ est la cste d'Euler.

Définition : Constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

ou :

$$\ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma + o(1)$$

Preuve :

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x \cdot n!} = x \cdot e^{-x\ln(n)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k}$$

$$= x \cdot e^{-x\ln(n)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

$$= x \cdot e^{x\gamma} \cdot e^{o(1)} \cdot \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{Euler - Gauss}} \frac{1}{\Gamma(x)}$$

d'où le résultat. ☒

Probas :

Définition : $\forall a, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g_{a,\lambda} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{a-1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

est la densité de la loi Gamma, notée $\gamma(a, \lambda)$.

Vérifions qu'il s'agit bien d'une densité :

Dans le cas où $a \geq 1$:
- $g_{a,\lambda} \in \mathcal{C}_M(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

On calcule alors :

$$\int_{\mathbb{R}} g_{a,\lambda}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{a-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^{a-1} \lambda\,dx$$

$$\underset{\substack{t = \lambda x \\ dt = \lambda dx}}{=} \frac{1}{\Gamma(a)} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{a-1}\,dt}_{\Gamma(a)} = 1.$$

Donc c'est bien une densité.

Rmq : sur $]0;1[$, $g_{a,\lambda} \notin \mathcal{C}_M(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ car $g_{a,\lambda}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Mais on peut qd même mq $\int_{\mathbb{R}_+^*} g_{a,\lambda}(x)\,dx = 1$. ■

Propriété :

$$\gamma(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda).$$

Preuve :

$$g_{1,\lambda}(x) = \frac{\lambda}{\underbrace{\Gamma(1)}_{1}} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$
$$= f_{\mathcal{E}}(\lambda).$$ ■

Propriété : Si $X \sim \gamma_{a,\lambda}$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a}{\lambda} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Preuve :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot g_{a,\lambda}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} \cdot x^a\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^a \cdot \lambda\,dx \underset{\substack{t = \lambda x \\ dt = \lambda dx}}{=} \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(a)} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{(a+1)-1}\,dt}_{\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{a\,\Gamma(a)}{\lambda\,\Gamma(a)} = \frac{a}{\lambda}.$$

On procède similairement pour la variance :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Formule du transfert

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot g_{a,\lambda}(x)\,dx - \frac{a^2}{\lambda^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} \cdot x^{a+1}\,dx - \frac{a^2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(a)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^{a+1}\,\lambda\,dx - \frac{a^2}{\lambda^2}$$

$t = \lambda x$, $dt = \lambda dx$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(a)} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{(a+2)-1}\,dt}_{\Gamma(a+2) = (a+1)\Gamma(a+1) = a(a+1)\Gamma(a)} - \frac{a^2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{a^2+a}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}.$$

☑

<u>Propriété</u>: X et Y deux v.a.r. indépendantes tq :

$\begin{cases} X \sim \gamma(a,\lambda) \\ Y \sim \gamma(b,\lambda) \end{cases}$ avec $(a,b,\lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$

Alors $X+Y \sim \gamma(a+b,\lambda)$

<u>Preuve</u>:

<u>Résultats de cours utilisés</u> :

→ X, Y v.a.r. ⫫ de dens. f_X et f_Y.
Si $f_X * f_Y \in \mathcal{C}_M(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $X+Y$ a pour densité $f_X * f_Y$.

→ Avec $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \cdot g(y)\,dy.$$

appelé le <u>produit de convolution</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,\lambda}(x-y) \cdot g_{b,\lambda}(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda(x-y)} (x-y)^{a-1} \times \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda y} \cdot y^{b-1}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-y) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\, dy$$

Or $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-y) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>y \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>y>0.$$

D'où $\forall x>0$:

$$g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \int_0^x e^{-\lambda x + \cancel{\lambda y} - \cancel{\lambda y}} (x-y)^{a-1} \cdot y^{b-1}\, dy$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-y)^{a-1} y^{b-1}\, dy$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda x} \int_0^x x^{a-1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{a-1} x^{b-1} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{b-1} dy$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda x} \int_0^x \left(1-\frac{y}{x}\right)^{a-1} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{b-1} \cdot x^{a+b-2}\, dy$$

$t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xt$
$dy = x \cdot dt$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot x^{a+b-1} \cdot e^{-\lambda x} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{a-1} \cdot t^{b-1}\, dt}_{B(a,b)}$$

Et $g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$.

Donc on a : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} B(a,b) \times \underbrace{\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda x} \cdot x^{a+b-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)}_{g_{a+b,\lambda}(x)}$$

Nous constatons que $g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}$ est continue par morceaux, donc la v.a.r. $X+Y$ admet $g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}$ pour densité.

Or comme on a de plus :

$$\underbrace{g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}}_{\substack{=1 \text{ en intégrant} \\ \text{sur } \mathbb{R} \text{ car c'est} \\ \text{une densité}}} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} B(a,b) \cdot \underbrace{g_{a+b,\lambda}}_{\text{idem}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} B(a,b) = 1 \Rightarrow g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda} = g_{a+b,\lambda}.$$

Rmq : On retrouve également l'égalité $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ d'une autre manière.

Application : Loi du χ^2 :

Si $X_1, \dots, X_m$ sont iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = X_1^2 + \dots + X_m^2$ admet la densité :

$$f_Y(x) = \frac{1}{2^{m/2} \cdot \Gamma(\frac{m}{2})} \cdot x^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

On note alors $Y \sim \chi^2(m)$ (loi du Khi-deux à m degrés de liberté).

Rmq : $\chi^2(m)$ est utilisé en inférence statistique pour vérifier l'adéquation d'une distribution empirique à une loi donnée. => Test d'ajustement du χ^2.

Preuve :

① $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ car si on note Φ la fonction de répartition de X :

$$\mathbb{P}(X^2 \leq v) = \mathbb{P}(-\sqrt{v} \leq X \leq \sqrt{v}) = 2 \cdot \mathbb{P}(0 \leq X \leq \sqrt{v})$$
$$= 2[\Phi(\sqrt{v}) - \Phi(0)] = 2 \cdot \Phi(\sqrt{v}) - 1$$

$\Rightarrow F_{X^2}(v) = 2\cdot\Phi(v) - 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$

Or $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$

$\Rightarrow \frac{d}{dv} F_{X^2}(v) = 2\cdot \Phi'(v) \cdot \times \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{e^{-v/2}}{\sqrt{2\pi v}}$

D'où $f_{X^2}(v) = \frac{e^{-v/2}}{\sqrt{2\pi v}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{1/2}}{\underbrace{\sqrt{\pi}}_{=\Gamma(\frac{1}{2})}} \cdot e^{-v/2} \cdot v^{-1/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(v)$$

$$= g_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(v) .$$

(2) Or les v.a.r. $X_1^2, \dots, X_n^2$ sont ⫫, leur somme suit la loi $[\gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})]^{*n} = \gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$, d'où la densité présentée.