267

✱ = développement(s)

La fonction Gamma.

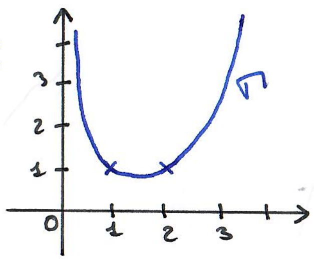
Historique / Motivation :
- Factorielle → $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- Transformées de Laplace.
- Euler en 1729.

I Étude de la fonction Gamma.

Définition 1 :
$$\Gamma :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}.\, t^{x-1}\, dt$$

Propriétés 2 :
- Γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p.\, t^{x-1}.e^{-t}\, dt$$
- Γ est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

Graphe de Γ :



Thm 3 : Bohr-Mollerup ✱

Γ est l'unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ logarithmiquement convexe et vérifiant :
$\Gamma(1) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

II Fonction Beta et autres formules.

Déf 4 : $\forall x, y > 0$:
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1}\, dt$$

Ppté 5 :
- B est bien définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- $B(x,y) = B(y,x)$
- $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$

Thm 6 : Formule d'Euler-Gauss
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Ppté 7 :
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
Donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Thm 8 : Formule de Weierstrass

$\forall x > 0$:
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\cdot e^{\gamma x}.\prod_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}\right]$$
où γ est la constante d'Euler.

III Probabilités.

Déf 9 : $\forall a, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$:
$$g_{a,\lambda} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}.e^{-\lambda x}.x^{a-1}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$
est la densité de la loi Gamma, notée $\gamma(a,\lambda)$.

Ptés 10 :
- $\gamma(1,\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$
- $X \sim \gamma(a,\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E[X] = \frac{a}{\lambda} \\ Var(X) = \frac{a}{\lambda^2} \end{cases}$

Ppté 11 : Produit de convolution de lois Gamma. ✱

X et Y 2 v.a.r. $\perp\!\!\!\perp$ tq :
$\begin{cases} X \sim \gamma(a,\lambda) \\ Y \sim \gamma(b,\lambda) \end{cases}$ avec $(a,b,\lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$

Alors $X+Y \sim \gamma(a+b,\lambda)$

Application 12 : Loi du χ^2

$X_1, \ldots, X_n$ iid de loi $\mathcal{N}(0;1)$ alors $Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ admet pour densité :
$$f_Y(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

On note alors $Y \sim \chi^2(n)$ (loi du Khi-deux à n degrés de liberté).