1

Intégrales de Wallis

Références :

- Skandalis p. 24
- Dantzer p. 218
- Gourdon p. 130

Recasages : privilégiés

- 201 : Études de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications
- 237 : Construction de l'intégrale en lien avec les primitives
- 403 : Exemples d'études de suites définies par une relation de récurrence.
- 421 : Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fct° continue sur un segment. Aspects algorithmiques.
- 436 : Exemples d'application de l'intégration par parties.

+ "au forceps" : 202, 213, 223, 241, 263, 402.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx}$$

① Formule de récurrence. → IPP

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^{n+1}(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v'(x)}\,dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = (n+1)\sin^n(x)\cdot\cos(x) \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

En intégrant par parties on obtient :

$$I_{n+2} = \underbrace{\Big[\underbrace{-\cos(x)}_{0 \text{ en } \frac{\pi}{2}} \times \underbrace{\sin^{n+1}(x)}_{0 \text{ en } 0}\Big]_0^{\pi/2}}_{0} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n(x)\underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)}\,dx$$

$$I_{n+2} = (n+1)\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx}_{I_n} - (n+1)\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)\,dx}_{I_{n+2}}$$

$$\Rightarrow \quad (n+2)\, I_{n+2} = (n+1)\, I_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n} \quad \text{ou} \quad \boxed{I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}} \quad (n \geq 2)$$

2 Formule explicite.

* On a $\forall n \geq 2 : \quad n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2}$

  $\Rightarrow \quad \forall n \geq 2 : \quad n \cdot I_n \cdot I_{n-1} = (n-1) \cdot I_{n-1} \cdot I_{n-2}$

  $\Rightarrow \quad (n \cdot I_n\, I_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

* $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$

* $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^1(x)\,dx = \big[-\cos(x)\big]_0^{\pi/2} = -0+1 \Rightarrow \boxed{I_1 = 1}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \boxed{n \cdot I_n \cdot I_{n-1} = \frac{\pi}{2}}$

* Cas pair: $\quad \forall n \in \mathbb{N} :$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2} \cdot I_0$$

$$= \overset{I_0}{\frac{\pi}{2}} \times \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k-1}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \times \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k}$$

on "ajoute" les termes pairs au numérateur.

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} (2k)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2}}$$

* **Cas impair :** $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n\,(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1} \cdot \overset{=1}{I_1}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k+1} \times \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k}$$

on "ajoute" les termes pairs au dénominateur.

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k)^2}{\prod_{k=1}^{2n+1} k}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{2n+1} = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

3 Équivalent en $+\infty$:

On a $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $\forall n \geq 2$:

$$0 < \sin^n(x) \leq \sin^{n-1}(x) \leq \sin^{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow 0 < I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

D'après le théorème des gendarmes on a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1 \Rightarrow I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} I_{n-1}$$

$$\Rightarrow n\, I_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} n\, I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow n\, I_n^2 \times \frac{2}{\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(I_n \cdot \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1 \text{ et finalement } \boxed{I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

4 Formule de Wallis.

Soit $u_n = \frac{1}{n}\left[\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\right]^2$. Montrer que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi}$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. Or :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \underbrace{\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}}_{I_{2n+1}} \times \underbrace{\frac{2}{\pi} \times \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}}_{\frac{1}{I_{2n}}}$$

$$= \frac{2}{\pi(2n+1)}\left[\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\right]^2$$

D'où :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2n}{\pi(2n+1)} \times \underbrace{\frac{1}{n}\left[\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\right]^2}_{u_n}$$

Et finalement : $u_n = \pi \times \underbrace{\frac{2n+1}{2n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \times \underbrace{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$.

Rmq : Cela permet d'écrire π sous la forme :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \ldots$$

5 Équivalent de $\binom{2p}{p}$.

$$\binom{2p}{p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \underbrace{\frac{(2p)!}{(p!)^2} \times \frac{\pi}{2\times 2^{2p}}}_{I_{2p}} \times \frac{2\times 2^{2p}}{\pi} = I_{2p} \times \frac{2\times 2^{2p}}{\pi}$$

$$\Rightarrow \binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{\cancel{4}p}} \times \frac{\cancel{2}\cdot 2^{2p}}{\pi} \Rightarrow \boxed{\binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2^{2p} \cdot \frac{1}{\sqrt{p\pi}}}$$

6 Constante de la formule de Stirling.

Si on a déjà : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K \cdot e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}$

Alors :

$$\frac{(2p)!}{(p!)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{K} \cdot \cancel{e^{-2p}} \cdot (2p)^{2p+\frac{1}{2}}}{K^{\cancel{2}} \cdot \cancel{e^{-2p}} \cdot p^{2p+1}} = \frac{2^{2p+\frac{1}{2}}}{K \cdot p^{1/2}} = \frac{2^{2p} \cdot \sqrt{2}}{K \cdot \sqrt{p}}$$

Or $\dfrac{(2p)!}{(p!)^2} = \dbinom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} 2^{2p} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{p\pi}}$

D'où : $\cancel{2^{2p}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\cancel{p}\pi}} = \cancel{2^{2p}} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{\cancel{p}}} \times \dfrac{1}{K}$

$\Rightarrow$ $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$ et finalement $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}$

Remarques :

- C'est bien sûr beaucoup trop long pour faire un seul développement, il faut choisir les bons morceaux selon la leçon.
- Le calcul explicite ne me paraît pas hyper intéressant à présenter (en plus d'être casse-gueule)
- L'avantage c'est qu'on peut facilement piocher un petit bout supplementaire pour combler les 15 min au besoin.