3)

Bases et dimensions d'espaces vectoriels.

Références :
- Skandalis p. 149
- Gourdon p. 111

Recasages :
- 107 : Dimension d'un e.v. admettant une famille génératrice finie, Rang d'une famille de vecteurs.
- 112 : Changements de bases en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.

?

1) Théorème de la base incomplète.

$\begin{cases} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev} \\ G \subset E \text{ une partie génératrice finie de } E \\ L \subset G \text{ une partie libre de } E \end{cases}$

Rmq : valable aussi en dim. ∞.

$\Rightarrow \exists B$ une base de E tq $L \subset B \subset G$.

On pose $\mathcal{G} = \{X \text{ partie génératrice de } E \mid L \subset X \subset G\}$

On a :

* $G \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \neq \emptyset$.
* Soit $B \in \mathcal{G}$ de cardinal minimal parmi les éléments de $\mathcal{G}$.

→ B est génératrice de E par définition de $\mathcal{G}$

→ Mq B est libre :

$L \subset B \subset G$ donc on peut écrire :

$$B = \{\underbrace{x_1, \dots, x_r}_{\in L}, \underbrace{x_{r+1}, \dots, x_\ell}_{\in G \setminus L}\}$$

Soit $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x_i = 0$, 2 possibilités :

* Si $\forall i \geqslant r+1$, $\lambda_i = 0$, alors comme L est libre, on a $\lambda_i = 0$ $\forall i \in [\![1;\ell]\!]$ et donc B libre.
* Sinon : $\exists i_0 \geqslant r+1$ tq $\lambda_{i_0} \neq 0$.

  Alors on peut écrire :
  $$x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\ell} \lambda_i x_i$$
  Ainsi $B \setminus \{x_{i_0}\}$ est également génératrice et $\in \mathcal{G}$.
  Or $\text{Card}(B \setminus \{x_{i_0}\}) < \text{Card}(B)$, ce qui est absurde car on a supposé B de cardinal minimal dans $\mathcal{E}_g$.

Donc on a nécessairement B libre, et donc B est une base.

Corollaire : E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
a) Tte partie génératrice finie de E contient une base.
b) Tte partie libre de E se complète à une base.

a) En prenant $L = \emptyset$ dans le thm de la base incomplète.
b) En prenant $G = G_1 \cup L$ avec G_1 génératrice finie ds le thm de la base incomplète.

2 Lemme d'échange de Steinitz.

$G \subset E$ partie génératrice finie, $x \in G$, $y \in E$.
Notons $y = \sum_{z \in G} \lambda_z \cdot z$, en supposant $\lambda_x \neq 0$.

Alors $(G \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ est génératrice.

Notons $G' = (G \setminus \{x\}) \cup \{y\}$.

$$\lambda_x \neq 0 \Rightarrow \quad y = \sum_{z \in G \setminus \{x\}} \lambda_z \cdot z \; + \lambda_x \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\lambda_x} \Big[\underbrace{y}_{\in \{y\}} - \underbrace{\sum_{z \in G \setminus \{x\}} \lambda_z \cdot z}_{\in G \setminus \{x\}} \Big] \in \mathrm{Vect}(G')$$

On a bien $G \subset \mathrm{Vect}(G')$, et donc $E = \mathrm{Vect}(G) \subset \mathrm{Vect}(G')$.

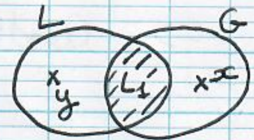
③ Cardinal des bases d'e.v. finis.

$\begin{cases} E \text{ un e.v. fini.} \\ G \text{ une partie génératrice finie de } E. \\ L \text{ une partie libre de } E. \end{cases}$
$\Rightarrow L$ est finie et $\mathrm{Card}(L) \leq \mathrm{Card}(G)$.

a) On suppose L finie et on mq $\mathrm{Card}(L) \leq \mathrm{Card}(G)$ par un raisonnement par récurrence sur $\mathrm{Card}(L \setminus G)$:

$P(N) =$ « G génératrice finie et L libre, $N = \mathrm{Card}(L \setminus G)$ $\Rightarrow \mathrm{Card}(L) \leq \mathrm{Card}(G)$ »

* Initialisation : $N = 0$
$\Rightarrow \mathrm{Card}(L \setminus G) = 0 \Rightarrow L \subset G \Rightarrow \mathrm{Card}(L) \leq \mathrm{Card}(G)$.
$P(0)$ est vérifiée.



Lemme de Steinitz pour "faire rentrer" L dans G.

* Hérédité : principe :
Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $P(N)$ vraie.
Si L partie libre et G génératrice finie de E tq $\mathrm{Card}(L \setminus G) = N+1$, on pose $\begin{cases} L_1 = G \cap L \\ y \in L \setminus G \end{cases}$

G génératrice $\Rightarrow$ $y = \sum_{z \in G} \lambda_z \cdot z$.

L libre $\Rightarrow$ $y \notin \mathrm{Vect}(L_1)$
$\Rightarrow \exists x \in G \setminus L_1$ tq $\lambda_x \neq 0$.

Par le lemme d'échange de Steinitz :
$G' = (G \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ est génératrice.

Or $\mathrm{Card}(L \setminus G') = N$ donc d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(N)$ on a :
$\mathrm{Card}(L) \leq \mathrm{Card}(G') = \mathrm{Card}(G)$.

b) Soit T une <u>partie infinie</u> de E.
Elle contient une partie finie de $\mathrm{Card} = \mathrm{Card}(G)+1$, qui ne peut pas être libre, donc T n'est pas libre.

<u>Corollaire</u> :
Rmq : se généralise en dim ∞.
Dans un e.v. de dimension finie, ttes les bases sont finie et ont le même cardinal.

Soient B_1, B_2 des bases.
B_1 est libre et B_2 est génératrice $\Rightarrow \mathrm{Card}(B_1) \leq \mathrm{Card}(B_2)$
B_2 est libre et B_1 est génératrice $\Rightarrow \mathrm{Card}(B_2) \leq \mathrm{Card}(B_1)$

$\Rightarrow \mathrm{Card}(B_1) = \mathrm{Card}(B_2)$.