Théorème de Bohr-Mollerup.

Références :

- Poly orange T. Meyre p. 88-89
- Étude de la fonction Γ : Gourdon p. 315 ; Dantzer p. 494 ; Kebrane & Elineau p. 281

Recasages :

- 217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
- 267 : La fonction Gamma.
- 427 : Exemples d'étude de fct°s définies par une intégrale.
- 447 : Exemples d'équations fonctionnelles.

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$$

est l'unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ logarithmiquement convexe et vérifiant :

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \end{cases}$$

* Γ est logarithmiquement convexe :

Posons $g = \ln(\Gamma)$.

$$\Rightarrow \quad g' = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad g'' = \frac{\Gamma'' \cdot \Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$$

On veut mq $g'' \geq 0$, donc que $\Gamma'' \cdot \Gamma - (\Gamma')^2 \geq 0$, c'est-à-dire que $\Gamma'' \cdot \Gamma \geq (\Gamma')^2$.

Posons :

$$f(t) = t^{\frac{x-1}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad g(t) = \ln t \cdot t^{\frac{x-1}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}}.$$

Et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schawarz $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)\cdot g(t)\,dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt}$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} \ln t \cdot t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt} \cdot \sqrt{\int_0^{+\infty} \ln^2 t \cdot t^{x-1} e^{-t}\,dt}$$

$$\Rightarrow \quad |\Gamma''(x)| \leq \sqrt{\Gamma(x)} \cdot \sqrt{\Gamma''(x)}$$

$$\Rightarrow \quad (\Gamma''(x))^2 \leq \Gamma(x)\cdot\Gamma''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$, ce qui est le résultat recherché.

* $\underline{\Gamma(1) = 1}$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 \cdot e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1$$

* $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)}$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u'(t)} \cdot \underbrace{t^x}_{v(t)}\,dt \overset{\text{ipp généralisée}}{=} \underbrace{\left[-e^{-t}\cdot t^x\right]_0^{+\infty}}_{0} + x \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt}_{\Gamma(x)}$$

$$u(t) = -e^{-t} \quad \text{et} \quad v'(t) = x \cdot t^{x-1}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x).$$

* <u>Unicité</u> :

Soit f une autre fonction vérifiant les mêmes conditions.

→ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x+1) = x\cdot f(x)$

$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x+n) = f(x)\cdot \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \quad (A)$

(par récurrence sur n).

→ $f(1) = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) = n! \quad (B)$

→ f est logarithmiquement convexe
$\Rightarrow \ln(f)$ est convexe
$\Rightarrow \forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall x \in [0;1]$:

$$\ln\left[f(xu+(1-x)v)\right] \leq \overbrace{x \cdot \ln(f(u))}^{\ln(f(u)^x)} + \overbrace{(1-x)\cdot \ln(f(v))}^{\ln(f(v)^{1-x})}$$

Soit par passage à l'exponentielle :

$$f(xu+(1-x)v) \leq f(u)^x + f(v)^{1-x} \quad (C)$$

→ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire : $n+x = x\overbrace{(n+1)}^{u} + (1-x)\overbrace{n}^{v}$
d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0;1]$:

$$f(n+x) \overset{(C)}{\leq} f(n+1)^x \cdot f(n)^{1-x} \overset{(B)}{=} (n!)^x \cdot [(n-1)!]^{1-x}$$
$$= n^x \cdot \cancel{[(n-1)!]^x} \cdot [(n-1)!]^{1-x}$$
$$\Rightarrow f(n+x) \leq n^x \cdot (n-1)! \quad (D)$$

→ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $n+1 = x\overbrace{(n+x)}^{u} + (1-x)\overbrace{(n+1+x)}^{v}$
d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0;1]$:

$$n! \overset{(B)}{=} f(n+1) \overset{(C)}{\leq} f(n+x)^x \cdot f(n+1+x)^{1-x}$$
$$= \cancel{f(n+x)^x} \cdot \left[(n+x)\cdot f(n+x)\right]^{1-x}$$
$$\Rightarrow n! \leq (n+x)^{1-x} \cdot f(n+x) \quad (E)$$

→ Avec (D) et (E) on obtient :
$n! \cdot (n+x)^{x-1} \leq f(n+x) \leq n^x \cdot (n-1)!$
Soit d'après (A), $\forall x \in]0;1]$:

$$0 \leq n! \cdot (n+x)^{x-1} \leq f(x) \cdot \prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \leq (n-1)! \cdot n^x \quad (F)$$

→ Γ et f vérifient toutes deux les conditions de l'énoncé et vérifient donc toutes deux (F), donc par passage à l'inverse on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{(n-1)!\, n^{x}} \leq \frac{1}{\Gamma(x)\cdot \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} \leq \frac{1}{n!\cdot (n+x)^{x-1}}$$

Et par multiplication avec (F) pour f :

$$\frac{\cancel{n!}\cdot (n+x)^{x-1}}{\cancel{(n-1)!}\cdot n^{x-1}} \leq \frac{f(x)\cdot \cancel{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}}{\Gamma(x)\cdot \cancel{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}} \leq \frac{\cancel{(n-1)!}\cdot n^{x-1}}{\cancel{n!}\cdot (n+x)^{x-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n+x}{n}\right)^{x-1} \leq \frac{f(x)}{\Gamma(x)} \leq \left(\frac{n}{n+x}\right)^{x-1}$$

Et donc par théorème des gendarmes en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\underline{f(x)=\Gamma(x)\ \forall x\in]0;1}$

Or comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} f(x+1) = x\cdot f(x) \\ \Gamma(x+1) = x\cdot \Gamma(x) \end{cases}$, cette égalité est vraie $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, et donc $\underline{f=\Gamma}$, d'où l'unicité.