6

Produit de convolution de 2 lois Gamma.

Références :
- Poly orange T. Meyre p. 275-276
- Meyre, Probabilités, Tome Second, p. 69.

Recasages :
- 230 : Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples.
- 232 : Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
- 258 : Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
- 267 : La fonction Gamma.
- 437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
- 427 : Exemple d'étude de fonctions définies par une intégrale.

Rappels de cours :

→ Produit de convolution de f et g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \cdot g(y)\, dy.$$

→ X, Y deux v.a.r. $\perp\!\!\!\perp$ de densités f_X et f_Y.

$f_X * f_Y \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow X+Y$ a pour densité $f_X * f_Y$.

→ La loi $\gamma(a, \lambda)$ $(a, \lambda \in \mathbb{R}_+^*)$ a pour densité :

$$g_{a,\lambda} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{a-1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

→ Fonctions Gamma et Bêta :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt. \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, & B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1}\, dt. \end{cases}$$

Soient X et Y deux v.a.r. $\perp\!\!\!\perp$ tq :

$X \sim \gamma(a, \lambda)$, $Y \sim \gamma(b, \lambda)$ avec $a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors : $X + Y \sim \gamma(a+b, \lambda)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,\lambda}(x-y) \cdot g_{b,\lambda}(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot e^{-\lambda(x-y)} \cdot (x-y)^{a-1} \cdot \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda y} \cdot y^{b-1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-y)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\, dy$$

On :

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-y) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) = 1 \iff \begin{cases} x-y>0 \\ y>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>y \\ y>0 \end{cases} \iff x>y>0$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot \int_0^x e^{-\lambda x + \cancel{\lambda y} - \cancel{\lambda y}} \cdot (x-y)^{a-1} \cdot y^{b-1}\, dy$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \int_0^x (x-y)^{a-1} \cdot y^{b-1}\, dy$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \int_0^x x^{a-1}\left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot x^{b-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{b-1} dy$$

On effectue le changement de variables :

$$t = \frac{y}{x} \iff y = xt \quad \text{avec } dy = x \cdot dt$$

D'où :

$$g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda x} \int_0^1 (1-t)^{a-1} \cdot t^{b-1} \times \underbrace{x^{a+b-2} \times x}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{a+b-1} \cdot \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{a-1} \cdot t^{b-1}\, dt}_{B(a,b)}$$

On a également $g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} B(a,b) \times \underbrace{\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda x} \cdot x^{a+b-1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)}_{g_{a+b,\lambda}(x)}$$

Nous constatons que $g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}$ est continue par morceaux, donc la v.a.r. $X+Y$ admet $g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}$ pour densité.

De plus :

$$\underbrace{g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda}}_{\text{= 1 en intégrant sur } \mathbb{R} \text{ car c'est une densité}} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \cdot B(a,b) \cdot \underbrace{g_{a+b,\lambda}}_{\text{idem}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} B(a,b) = 1$$

(Rmq : on vient de montrer l'égalité $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$).

$$\Rightarrow g_{a,\lambda} * g_{b,\lambda} = g_{a+b,\lambda}.$$

$\Rightarrow$ $X+Y$ a pour densité $g_{a+b,\lambda}$.