# **Développement** : Nombres de Bell

## 1) Contexte

**Exercice 1 :**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{B}_n$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1;n]\!] = \{1;\dots;n\}$, avec par convention $\mathcal{B}_0 = 1$.

1. Calculer $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
   Exprimer $\mathcal{B}_{n+1}$ en fonction des $\mathcal{B}_k$, avec $k \in [\![1;n]\!]$.
2. On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} x^n$.
   Montrer que le rayon de convergence $R$ de cette série est non nul et calculer $f(x)$ pour $x \in ]-R;R[$.
3. Exprimer $\mathcal{B}_n$ comme somme d'une série.

### a. Sources


- [X-ENS AlG1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. (2007). *Exercices de mathématiques : Oraux X-ENS. Algèbre 1* (2e édition). Cassini.
- [KET]H. Ketrane, L. Elineau. (2020). *Épreuve orale d'exemples et exercices. Agrégation interne/CAERPA Mathématiques*. Dunod.


### b. Recasages

- **210** : Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- **413** : Exemples d'applications des séries entières.
- **438** : Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.

### c. Quelques remarques préliminaires

Pour l'énoncé de l'exercice, j'ai fait le compromis qui me semblait être le plus intéressant entre les 2 versions dont je disposais (voir « Sources »). J'ai également modifié les notations par rapports à ce qui était proposé pour une version qui me semble plus intuitive. Le développement présenté ci-dessous est très détaillé, il ne rentre pas tel quel en 15 minutes. Beaucoup de points peuvent être simplement dits à l'oral. Le calcul de $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ peut également être omis pour gagner du temps, mais je trouvais intéressant de le laisser là pour mieux comprendre ce que l'on fait.

Cet exercice est intéressant car beaucoup de notions y apparaissent en lien avec les séries entières : équation différentielle, produit de Cauchy, série double...

## 2) Développement

On note $E^n$ l'ensemble des partitions de $[\![1;n]\!]$, et le cardinal d'un ensemble sera noté #.

$\boxed{1}$ On a de manière immédiate :

- $\mathcal{B}_1 = \#E^1 = \#\{\{1\}\} = 1$
- $\mathcal{B}_2 = \#E^2 = \#\{\{1,2\};\{1\}\{2\}\} = 2$
- $\mathcal{B}_3 = \#E^3 = \#\{\{1,2,3\};\{1,2\}\{3\};\{1,3\}\{2\};\{2,3\}\{1\};\{1\}\{2\}\{3\}\} = 5$

On pose ensuite :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad E_k^n = \{\text{partitions de } [\![1;n]\!] \text{ telles que la partie contenant } n \text{ soit de cardinal } k\}$$

**Exemple(s) :**

Pour $n = 3$, on s'intéresse donc aux partitions dans lesquelles la partie contenant 3 a un cardinal donné :

- $\#E_1^3 = \#\{\text{partitions de } [\![1;3]\!] \text{ telles que la partie contenant 3 soit de cardinal 1}\} = \#\{\{1,2\}\{3\};\{1\}\{2\}\{3\}\} = 2$
- $\#E_2^3 = \#\{\text{partitions de } [\![1;3]\!] \text{ telles que la partie contenant 3 soit de cardinal 2}\} = \#\{\{1,3\}\{2\};\{2,3\}\{1\}\} = 2$
- $\#E_3^3 = \#\{\text{partitions de } [\![1;3]\!] \text{ telles que la partie contenant 3 soit de cardinal 3}\} = \#\{\{1,2,3\}\} = 1$

On a donc pour un certain $n$ fixé que les $E_k^n$ sont disjoints par construction et donc que :

$$E^n = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k^n \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_n = \#E^n = \sum_{k=1}^{n} \#E_k^n$$

Or pour constituer un élément de $E_k^n$ il faut :

- choisir $k-1$ éléments de $[\![1;n]\!]$ pour compléter la partie contenant $n$, soit $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités ;
- réaliser une partition des $n-k$ éléments restants, soit $\mathcal{B}_{n-k}$ possibilités.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!]$ : $\#E_k^n = \binom{n-1}{k-1}\mathcal{B}_{n-k}$, d'où :

$$\mathcal{B}_{n+1} = \#E^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \#E_k^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}\mathcal{B}_{n+1-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{l=k-1}}}{=} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\mathcal{B}_{n-l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j=l-n}}}{=} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\mathcal{B}_{j}$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathcal{B}_k}$$

**2** Montrons par récurrence forte la propriété suivante : $\mathcal{P}(n)$ : $\mathcal{B}_n \leqslant n!$

☞ <u>Initialisation</u> : $\mathcal{B}_0 = 1 \leqslant 1 = 0!$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
*$\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ se vérifient également immédiatement grâce à la question 1.*

☞ <u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vérifiée $\forall k \in [\![0;n]\!]$ :

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathcal{B}_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \qquad \text{en appliquant nos hypothèses de récurrence } \mathcal{P}(k)$$

$$\mathcal{B}_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times k! = n! \times \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leqslant 1} \leqslant n! \times (n+1) = (n+1)!$$

On a donc bien $\mathcal{B}_n \leqslant n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\mathcal{B}_n}{n!}|x|^n \leqslant |x|^n$
Or la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1, donc $\boxed{R \geqslant 1 (\neq 0)}$.

On a ainsi que $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R;R[)$ et donc $\forall x \in ]-R,R[$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!}x^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m=n-1}}}{=} 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_{m+1}}{(m+1)!}x^{m+1}$$

Et en dérivant :

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_{m+1}}{m!}x^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\mathcal{B}_k\right) x^k x^{m-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{\mathcal{B}_k}{k!}x^k \times \frac{1}{(m-k)!}x^{m-k}}_{\text{pdt de Cauchy de } \sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathcal{B}_n}{n!}x^n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}}$$

D'où $\forall x \in ]-R;R[$ :

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!}x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = f(x)e^x$$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in ]-R;R[$: $f(x) = \lambda e^{e^x}$
Or $1 = f(0) = \lambda e \implies \lambda = \frac{1}{e}$ et finalement :

$$\boxed{\forall x \in ]-R;R[, \quad f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x}}$$

**3** On a $\forall x \in ]-R;R[$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{B}_n \frac{x^n}{n!} = f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k!n!}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|kx|^n}{k!n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{|kx|}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{|x|})^k}{k!} = e^{e^{|x|}} < +\infty$$

Donc on peut appliquer le théorème de Fubini pour intervertir les sommes et on obtient finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{B}_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Soit par unicité du développement en série entière :

$$\boxed{\mathcal{B}_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}}$$