Leçon 413 : Commentaires

Notations :
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on s'intéresse aux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ de rayons de convergence R_a et R_b.

Définition 1 : Rayon de convergence : $R_a = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Définition 2 :

- Série entière **dérivée** : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
- Série entière **primitive** : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_{n-1}}{n} x^n$

Propriété 3 :

- $|x| < R_a \implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument
- $|x| > R_a \implies \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ diverge grossièrement

Exercice 1 :

On part de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} \forall x \in]-1;1[$ que l'on primitive (a) et dérive une (b) puis deux (c) fois.

Puis on prend $x = \dfrac{1}{2}$.

Définition 4 : La fonction f est **développable en série entière** au voisinage de 0 si :

$$\exists \alpha > 0, \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tels que : } \quad \forall x \in]-\alpha;\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors on a $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\alpha;\alpha[)$ et l'unicité du développement en série entière.

Exemple(s) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 2 :

On suppose qu'il existe une solution de la forme $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on dérive deux fois et on applique l'équation différentielle pour trouver une expression des coefficients. On conclut par unicité du développement en série entière.

Propriété 5 : Règle de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in [0;+] \implies R_a = \frac{1}{\lambda}$$

Avec pour convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Propriété 6 : Comparaison des rayons

$$|a_n| \leqslant |b_n| \text{ à partir d'un certain rang } \implies R_a \geqslant R_b$$

Exercice 3 :

1) Récurrence forte, puis d'Alembert, puis comparaison des rayons.
2) Utiliser l'espression de $_u n+2$ pour faire apparaître une équation fonctionnelle en $S(x)$, faire la décomposition en éléments simples, puis faire leur développement en série entière, et conclure par unicité de ce dernier.

Propriété 7 : Produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Théorème 8 : de Fubini dans le cas discret `voir [SKA] exercice 5.15 p.150`

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}| < +\infty \implies \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$$

Exercice 4 : DÉVELOPPEMENT :

Intéressant car fait apparaître de nombreuses notions :

- ☞ équation différentielle
- ☞ produit de Cauchy
- ☞ somme double ...

Exercice 5 :

On utilise la fonciton génératrice :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot t^k$$

$$\implies \mathbb{E}[X] = \varphi_X'(1) \quad \text{et} \quad Var(X) = \varphi_X''(1) + \varphi_X'(1) - \left[\varphi_X'(1)\right]^2$$

Exercice 6 :

Pas de difficulté majeure mais application intéressante des séries entières pour approximer π à l'aide de la formule de Machin (question 3). Un peu calculatoire.