Leçon 413 : Corrigé.

※ Exercice 1 : Application au calcul de somme d'une série ([FRE MP] n°10 p.197)

Principe : On part de la série entière $\sum_{n\leqslant 0} x^n$ dont on peut déduire d'autres séries en primitivant ou en dérivant. Puis on prend $x = \frac{1}{2}$.
Rappel : Pour intégrer ou primitiver, il faut se placer dans l'intervalle ouvert de convergence !
On a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ à l'intérieur de l'intervalle de convergence $]-1;1[$, d'où $\forall x \in]-1;1[$:

a) En intégrant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\right) dt = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

En prenant $x = \frac{1}{2}$ on trouve :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)}$$

b) En dérivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Car :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ d'une part et } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \text{ d'autre part}$$

En prenant $x = \frac{1}{2}$ on trouve :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2}$$

b) En dérivant encore :

$$x^2 f''(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-2} - x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n - x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}}_{f'(x)}$$

$$\Longrightarrow x^2 f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n - xf'(x)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 f''(x) + xf'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

En prenant $x = \frac{1}{2}$ on trouve :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6}$$

※ Exercice 2 : Application à la résolution d'une équation différentielle ([DAN] n°19.10 p.343)

Soit y développable en série entière sur $]-R;R[$ avec $R \in \mathbb{R}_+$.
Donc il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-R;R[, y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ donc } \forall x \in]-R;R[: \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \end{cases}$$

D'où $\forall x \in]-R;R[$:

$$xy''(x) + (x-2)y'(x) - 2y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_nx^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n-2)(n+1)a_{n+1} + (n-2)a_n\right] x^n - 2a_1 - 2a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)\left[(n+1)a_{n+1} + a_n\right] x^n - 2(a_1 + a_0) = 0$$

Par unicité du développement en série entière, l'équation est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 + a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1, (n-2)\left[(n+1)a_{n+1} + a_n\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ 2a_2 + a_1 = 0 \\ \forall n \geqslant 3, (n+1)a_{n+1} + a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ \forall n \geqslant 3, a_{n+1} = \dfrac{-1}{n+1}a_n \end{cases}$$

Or $a_{n+1} = \dfrac{-1}{n+1}a_n = \dfrac{-1}{n+1}\dfrac{-1}{n}a_{n-1} = \cdots = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)n\ldots 3}a_3 = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}6a_3$, et le rayon de convergence d'une série entière de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$ est $+\infty$. Donc les solutions de l'équation différentielle développables en série entière sont les y vérifiant :

$$\forall y \in \mathbb{R}, y(x) = a_0 - a_0x + \frac{a_0}{2}x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}6a_3x^n$$

$$\text{Soit } \forall y \in \mathbb{R}, y(x) = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2}) - 6a_3\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}}_{e^{-x}} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = (a_0 - 6a_3)\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3e^{-x} \text{ avec } a_0, a_3 \in \mathbb{R}$$

Or $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ donc finalement les solutions de l'équation sont de la forme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \alpha\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - \beta e^{-x} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Exercice 3 : Application au calcul de suites récurrentes ([FRA] n°4 p.193)

1) On démontre par récurrence forte la propriété : $\mathcal{P}(n) : |u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$:

☞ Initialisation :
$|u_0| = 1 \leqslant 2^1 - 1 = 1 \implies \mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
$|u_1| = 1 \leqslant 2^2 - 1 = 3 \implies \mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

☞ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!], \mathcal{P}(k)$ soit vérifée.

$$|u_{n+1}| = |u_n + 2u_{n-1} + (-1)^n \leqslant |u_n| + 2|u_{n-1}| + 1 \text{ par inégalité triangulaire}$$

$$\implies |u_{n+1}| \leqslant 2^{n+1} - 1 + 2(2^n - 1) + 1 \text{ par } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n-1)$$

$$\implies |u_{n+1}| \leqslant 2 \times 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2 \leqslant 2^{n+2} - 1$$

$$\implies \mathcal{P}(n+1) \text{ est vérifiée.}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$, donc $R \geqslant R_{2^{n+1}-1}$. Or $\left|\dfrac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, donc $R_{2^{n+1}-1} = \dfrac{1}{2}$, et donc finalement : $\boxed{R \geqslant \dfrac{1}{2}}$

2) $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = u_0 + u_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n = 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+2} \\
&= 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n\right) x^{n+2} \\
&= 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+2} \\
&= 1 + x + x\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1}}_{S(x)-1} + 2x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n}_{S(x)} + x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n}_{\frac{1}{1+x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies S(x) = 1 + x + xS(x) - x + 2x^2 S(x) + \frac{x^2}{1+x} \\
&\implies S(x) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)(1-x-2x^2)} \\
&\implies S(x) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2\ (1-2x)}
\end{aligned}$$

On effectue la décomposition en éléments simples de cette expression :

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2\ (1-2x)} = S(x) = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1-2x}$$

On multiplie par $(1+x)^2$ et on évalue en -1 :

$$\frac{1+x+x^2}{(1-2x)} = (1+x)A + B + \frac{C(1+x)^2}{1-2x} \implies B = \frac{1}{3}$$

On multiplie par $(1-2x)$ et on évalue en $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2} = \frac{A(1-2x)}{1+x} + \frac{B(1-2x)}{(1+x)^2} + C \implies C = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{(1+\frac{1}{2})^2} = \frac{7}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$$

On a donc $S(x) = \dfrac{A}{1+x} + \dfrac{1}{3(1+x)^2} + \dfrac{7}{9(1-2x)}$, on évalue alors cette expression en 0 :

$$\frac{1+0+0^2}{(1+0)^2\ (1-2\times 0)} = S(0) = \frac{A}{1+0} + \frac{1}{3(1+0)^2} + \frac{7}{9(1-2\times 0)} \implies 1 = A + \frac{1}{3} + \frac{7}{9} \implies A = -\frac{1}{9}$$

On obtient donc :

$$S(x) = -\frac{1}{9(1+x)} + \frac{1}{3(1+x)^2} + \frac{7}{9(1-2x)}$$

Or : $\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{9(1+x)} = \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \\
\dfrac{1}{3(1+x)^2} \underset{z=-x}{=} \dfrac{1}{3(1-z)^2} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n \\
\dfrac{7}{9(1-2x)} \underset{z=2x}{=} \dfrac{7}{9(1-z)} = \dfrac{7}{9}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{7}{9}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n
\end{array}\right.$

D'où $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{-9} x^n + \frac{(-1)^n(n+1)}{3} + \frac{7\cdot 2^n}{9}\right] x^n$ et donc par unicité du développement en série entière on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-(-1)^n + 3(-1)^n(n+1) + 7\cdot 2^n}{9}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n(3n+2) + 7\cdot 2^n}{9}}$$

Exercice 4 : Application au dénombrement : Nombres de Bell ([X-ENS AlG1] n°1.6 p.14 & [KET] dév 19 p.267)

Voir développement séparé !

Exercice 5 : Application aux probabilités ([FRE MP*] n°15.3 p.314 & [KET] n°3 p.119)

Principe : On utilise la fonction génératrice :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \cdot t^k \text{ par la formule du transfert}$$

Et on a alors :

$$\varphi'_X(1) = \mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \varphi''_X(1) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]$$

$$\Longrightarrow \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - \left[\varphi'_X(1)\right]^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = Var(X)$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'évènement « réussir le saut n ».
On a donc $\mathbb{P}(S_n) = \frac{1}{n}$ et $\forall k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \neq l$, S_k et S_l sont indépendants. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}\left(\overline{S_{n+1}} \cap S_n \cap \dots \cap S_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{S_{n+1}}\right) \times \mathbb{P}\left(S_n\right) \times \dots \times \mathbb{P}\left(S_1\right) \text{ par indépendance} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n!} \\
\Longrightarrow & \boxed{\mathbb{P}(X=n) = \frac{n}{(n+1)!}}
\end{aligned}$$

Remarque : Ici, si on veut calculer l'espérance sans la fonction génératrice, on doit calculer :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) \cdot n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$$

On va faire autrement grâce aux séries entières.

2) On pose donc :

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) \cdot t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} t^n$$

Calculons d'abord le rayon de convergence de cette série entière :
On pose $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ et donc :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{n} = \frac{n+1}{n^2+2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par la règle de d'Alembert, on sait donc que cette série entière a un rayon de convergence infini.

Calculons ensuite la somme de cette série entière :
On remarque que : $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = e^t - \frac{1}{t} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= e^t - \frac{1}{t} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t - \frac{1}{t} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - 1\right) \\
&= e^t - \frac{1}{t}\left(e^t - 1\right) = e^t - \frac{e^t}{t} + \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = e^t - \frac{e^t}{t} + \frac{1}{t}}$$

Calculons ensuite l'espérance :

$$\varphi'_X(t) = e^t - \frac{t \cdot e^t - e^t}{t^2} - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 \cdot e^t - e^t(t-1) - 1}{t^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbb{E}[X] = \varphi'_X(1) = e - 1}$$

Calculons enfin la variance :

$$\varphi''_X(t) = \frac{t^3 \cdot e^t \cdot [1+t] - 2t\left[t^2 \cdot e^t - t \cdot e^t + e^t - 1\right]}{t^4}$$

$$\Longrightarrow \varphi''_X(1) = \frac{1^3 \cdot e \cdot [1+1] - 2\left[1^2 \cdot e - e + e - 1\right]}{1^4}$$

$$\Longrightarrow \varphi''_X(1) = 2e - 2(e-1) \Longrightarrow \boxed{\varphi''_X(1) = 2}$$

$$\Longrightarrow Var(X) = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - \left[\varphi'_X(1)\right]^2 = 2 + e - 1 - (e-1)^2 = 1 + e - e^2 + 2e - 1 = 3e - e^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{Var(X) = e(3-e)}$$

Exercice 6 : Approximation de π ([KET] n°6 p.120)

1) $A = \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan(4\theta) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan(4\theta) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\tan(4\theta) - 1}{1 + \tan(4\theta)}$

Or $\tan(4\theta) = \tan(2\theta + 2\theta) = \dfrac{2\tan(2\theta)}{1 - \tan^2(2\theta)}$, et $\tan(2\theta) = \tan(\theta + \theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} = \dfrac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{25}{24} = \dfrac{5}{12}$

D'où :

$$\tan(4\theta) = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{10}{12} \times \frac{144}{119} = \frac{120}{199} \Longrightarrow A = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{119} \times \frac{119}{239} \Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{239}}$$

2) On sait que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Or $0 \leqslant \frac{1}{5} = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) \leqslant 1$

$\Longrightarrow 0 \leqslant \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}$ car tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$\Longrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \boxed{\arctan\left(\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\theta - \frac{\pi}{4}}$

3) En combinant les résultats des deux questions précédentes on obtient :

$$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) = 4\theta - \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\Longrightarrow \pi = 16 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

On peut alors utiliser le développement en série entière de arctan :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Par exemple en prenant :

$$\arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

On obtient :

$$\boxed{\pi \approx \mathbf{3,141}621}$$

En ajoutant seulement quelques termes, on gagne facilement plusieurs décimales.