Leçon 413 : Exemples d'applications des séries entières.

Exercice 1 : Application au calcul de somme d'une série ([FRE MP] n°10 p.197)

Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Exercice 2 : Application à la résolution d'une équation différentielle ([DAN] n°19.10 p.343)

Trouver les applications développables en série entière solutions de :

$$xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$$

Exercice 3 : Application au calcul de suites récurrentes ([FRA] n°4 p.193)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.
On considère la série entière $S : x \mapsto \sum u_n x^n, x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$ et en déduire que le rayon de convergence de S est $R \geqslant \frac{1}{2}$.
2) Calculer $S(x)$ pour $|x| < \frac{1}{2}$ et en déduire l'expression des u_n.

Exercice 4 : Application au dénombrement : Nombres de Bell ([X-ENS A1G1] n°1.6 p.14 & [KET] dév 19 p.267)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{B}_n$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1;n]\!] = \{1;\ldots;n\}$, avec par convention $\mathcal{B}_0 = 1$.

1. Calculer $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
   Exprimer $\mathcal{B}_{n+1}$ en fonction des $\mathcal{B}_k$, avec $k \in [\![1;n]\!]$.
2. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} x^n$.
   Montrer que le rayon de convergence R de cette série est non nul et calculer $f(x)$ pour $x \in]-R;R[$.
3. Exprimer $\mathcal{B}_n$ comme somme d'une série.

Exercice 5 : Application aux probabilités ([FRE MP*] n°15.3 p.314 & [KET] n°3 p.119)

Lors d'une compétition de saut en hauteur, un athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Il n'a droit qu'à un seul essai par barre.
On suppose les sauts indépendants, et que la probabilité de réussir le saut n est $r_n = \frac{1}{n}$.
1) On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. Quelle est la loi de X ?
2) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 6 : Approximation de π ([KET] n°6 p.120)

On rappelle la formule de trigonométrie suivante :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

1) Donner la valeur de $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ pour $\theta = \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.
2) Montrer que $\arctan\left[\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 4\theta - \dfrac{\pi}{4}$ pour $\theta = \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$.
3) En déduire une approximation de π.

Bibliographie :

- [DAN] F.F. Dantzer. (2021). *Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités* (2e éd.). De Boeck Supérieur.
- [FRA] J. Franchini, J.-C. Jacquens. (2021). *L'oral en poche : Agrégation interne de mathématiques*. Ellipses.
- [FRE MP] J. Freslon, S. Gugger, J. Poineau, D. Fredon, C. Maurin. (2018). *Maths MP : Exercices incontournables* (3e éd.). Dunod.
- [FRE MP*] J. Freslon, S. Gugger, J. Poineau, D. Fredon. (2014). *Mathématiques : MP | MP* : Exercices incontournables*. Dunod.
- [KET] H. Ketrane, L. Elineau. (2020). *Épreuve orale d'exemples et exercices. Agrégation interne/CAERPA Mathématiques*. Dunod.