

Séquence 7 : Équations

   **OBJECTIFS :**   

À la fin de cette Séquence 7, je dois connaître ...	Pour m'entraîner :
Le vocabulaire des équations	Cours partie A

Je dois savoir faire ...	Pour m'entraîner :		
	☆	☆☆	☆☆☆
Utiliser correctement le vocabulaire des équations.	n°1	n°2	
Résoudre une équation « directe »	n°3, 4, 5, 6	n°7, 8	n°9
Utiliser la distributivité pour résoudre une équation		n°10	
Résoudre une équation produit	n°11	n°12	
Appliquer les équations à la résolution de problèmes		n°13, 14	n°15, 16

A) Vocabulaire et notions de base

Définition 1 : Vocabulaire des équations

-  **Équation** : c'est une égalité comportant au moins un nombre dont la valeur n'est pas connue.
-  **Inconnue** : c'est le nombre que l'on cherche, désigné par une lettre (souvent x).
-  **Solution** : c'est la valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie.
-  **Résoudre une équation** : c'est trouver la (ou les) solution(s) de l'équation.

Remarque : une équation peut avoir plusieurs solutions, ou aucune !

Exemple(s) :

-  « $x + 1 = 3$ » est une équation avec **une seule inconnue** (x) et **une seule solution** qui est évidente : $x = 2$, car $2 + 1 = 3$.
-  « $y^2 = 4$ » est une équation avec **une seule inconnue** (y) mais avec **2 solutions** ! En effet, $(-2)^2 = 4$ ET $2^2 = 4$

Méthode 1 : Principes généraux de résolution d'une équation

- Une équation peut être considérée comme **une balance équilibrée** et qui doit **rester équilibrée** : si j'enlève 3 à un membre de l'équation, je dois enlever 3 aussi à l'autre. Si je divise un membre de l'équation par 2,5, je dois aussi diviser l'autre membre de l'équation par 2,5...
- Pour résoudre une équation, on cherche à modifier son écriture (sans déséquilibrer la balance !) pour avoir **uniquement l'inconnue dans un membre de l'équation**, et **uniquement des constantes dans l'autre membre**.

B) Résoudre une équation

1. Équations « directes »

Propriété 1 : Addition et soustraction

Une égalité reste vraie si on **ajoute** ou **soustrait** un **même nombre** à chacun de ses membres :

$$\text{Si } A = B, \text{ alors : } \begin{cases} A + k = B + k \\ A - k = B - k \end{cases}$$

Exemple(s) :

$x + 3 = 7$	$x - 5 = 12$	$x + 9 = 2$	$x - 8 = -11$	$2x - 8 = x - 4$
$x + 3 - 3 = 7 - 3$	$x - 5 + 5 = 12 + 5$	$x + 9 - 9 = 2 - 9$	$x - 8 + 8 = -11 + 8$	$2x - 8 + 8 = x - 4 + 8$
$x = 4$	$x = 17$	$x = -7$	$x = -3$	$2x = x + 4$
				$2x - x + x = x - 4 + x$
				$x = 4$

Propriété 2 : Multiplication et division

Une égalité reste vraie si on **multiplie** ou **divise** chacun de ses membres par un **même nombre** (différent de 0!) :

$$\text{Si } A = B \text{ et } k \neq 0, \text{ alors : } \begin{cases} A \times k = B \times k \\ A \div k = B \div k \end{cases}$$

Exemple(s) :

$x \div 3 = 7$	$x \times 5 = 15$	$\frac{x}{2} = -3$	$6x = 42$
$x \div 3 \times 3 = 7 \times 3$	$x \times 5 \div 5 = 15 \div 5$	$\frac{x}{2} \times 2 = -3 \times 2$	$6x \div 6 = 42 \div 6$
$x = 21$	$x = 3$	$x = -6$	$x = 7$

Méthode 2 : Résolution des équations « directes »

Pour la plupart des équations, il suffit d'utiliser les deux propriétés ci-dessus, éventuellement plusieurs fois, jusqu'à **isoler la variable** dans un membre de l'égalité, et les constantes dans l'autre.

Pour savoir dans quel ordre effectuer les opérations, il faut **regarder les priorités opératoires** et les **dépiler**.

Exemple(s) :

$3x + 4 = 10$ $3x + 4 - 4 = 10 - 4$ $3x = 6$ $3x \div 3 = 6 \div 3$ $x = 2$	$5y - 3 = 17$ $5y - 3 + 3 = 17 + 3$ $5y = 20$ $5y \div 5 = 20 \div 5$ $y = 4$
$7 + \frac{x}{3} = 9$ $7 + \frac{x}{3} - 7 = 9 - 7$ $\frac{x}{3} = 2$ $\frac{x}{3} \times 3 = 2 \times 3$ $x = 6$	$\frac{2x - 5}{4} = 1,5$ $\frac{2x - 5}{4} \times 4 = 1,5 \times 4$ $2x - 5 = 6$ $2x - 5 + 5 = 6 + 5$ $2x = 11$ $x = 11 \div 2 = 5,5$

2. Utiliser la distributivité pour résoudre une équation

Pour certaines équations, il peut être pertinent de d'abord utiliser la distributivité et de les simplifier, afin de se ramener aux cas vu ci-dessus.

☞ **Exemple(s) :**

$4(y + 6) = 36$ <p>1) On développe et on simplifie :</p> $4 \times y + 4 \times 6 = 36$ $4y + 24 = 36$ <p>2) On résoud :</p> $4y + 24 - 24 = 36 - 24$ $4y = 12$ $4y \div 4 = 12 \div 4$ $y = 3$	$7 + x = 3(3x - 11)$ <p>1) On développe et on simplifie :</p> $7 + x = 3 \times 3x - 3 \times 11$ $7 + x = 9x - 33$ <p>2) On résoud :</p> $7 + x - 7 = 9x - 33 - 7$ $x = 9x - 40$ $x - 9x = 9x - 40 - 9x$ $-8x = -40$ $-8x \div (-8) = -40 \div (-8)$ $x = 5$	$3(2x + 5) - 7 = 2(x + 6)$ <p>1) On développe et on simplifie :</p> $3 \times 2x + 3 \times 5 - 7 = 2 \times x + 2 \times 6$ $6x + 15 - 7 = 2x + 12$ $6x + 8 = 2x + 12$ <p>2) On résoud :</p> $6x + 8 - 8 = 2x + 12 - 8$ $6x = 2x + 4$ $6x - 2x = 2x + 4 - 2x$ $4x = 4$ $4x \div 4 = 4 \div 4$ $x = 1$
---	---	--

3. Équations produit

☞ **Propriété 3 :** Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Ces équations ont en général 2 solutions. On note alors :

$$S = \{\text{ensemble des solutions}\}$$

☞ **Exemple(s) :**

$(x - 2)(x + 5) = 0$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $x - 2 = 0$ $x - 2 + 2 = 0 + 2$ $x = 2$ </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> $x + 5 = 0$ $x + 5 - 5 = 0 - 5$ $x = -5$ </td> </tr> </table> $S = \{2; -5\}$	$x - 2 = 0$ $x - 2 + 2 = 0 + 2$ $x = 2$	$x + 5 = 0$ $x + 5 - 5 = 0 - 5$ $x = -5$	$(x + 4)(2x - 3) = 0$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> $x + 4 = 0$ $x + 4 - 4 = 0 - 4$ $x = -4$ </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> $2x - 3 = 0$ $2x - 3 + 3 = 0 + 3$ $2x = 3$ $2x \div 2 = 3 \div 2$ $x = 1,5$ </td> </tr> </table> $S = \{-4; 1,5\}$	$x + 4 = 0$ $x + 4 - 4 = 0 - 4$ $x = -4$	$2x - 3 = 0$ $2x - 3 + 3 = 0 + 3$ $2x = 3$ $2x \div 2 = 3 \div 2$ $x = 1,5$
$x - 2 = 0$ $x - 2 + 2 = 0 + 2$ $x = 2$	$x + 5 = 0$ $x + 5 - 5 = 0 - 5$ $x = -5$				
$x + 4 = 0$ $x + 4 - 4 = 0 - 4$ $x = -4$	$2x - 3 = 0$ $2x - 3 + 3 = 0 + 3$ $2x = 3$ $2x \div 2 = 3 \div 2$ $x = 1,5$				
$x^2 = 49$ <p>On peut écrire $x^2 = 7^2$ donc en appliquant le cas particulier vu dans la Séquence 8 sur la factorisation on a :</p> $(x - 7)(x + 7) = 0$ <p>Et donc $x = 7$ ou $x = -7$ soit $S = \{-7; 7\}$</p>					

Exercices

🔊 Exercice 1 : ☆

On considère l'équation $3x - 2 = 2 + 12$.

- 1) Quelle est l'inconnue? 🗨️ x
- 2) Que vaut le membre de gauche de cette équation pour $x = 7$? 🗨️ $3 \times 7 - 2 = 19$
- 3) Que vaut le membre de droite de cette équation pour $x = 7$? 🗨️ $7 + 12 = 19$
- 4) Que peut-on en conclure?
L'égalité est vraie pour $x = 7$, donc 7 est une solution de l'équation.

🔊 Exercice 2 : ☆☆☆

Vrai ou faux? Justifie.

- 1) 10 est une solution de l'équation $2x + 1 = 11$. VRAI FAUX
 $2 \times 10 + 2 = 20 + 2 = 22$ et non pas 11.
- 2) 11 est une solution de l'équation $x^2 + 1 = 122$. VRAI FAUX
 $11^2 + 1 = 121 + 1 = 122$.
- 3) 5 est une solution de l'équation $2x + 1 = 11$. VRAI FAUX
 $2 \times 5 + 2 = 10 + 2 = 12$.
- 4) -11 est une solution de l'équation $x^2 + 1 = 122$. VRAI FAUX
 $(-11)^2 + 1 = 121 + 1 = 122$.

🔊 Exercice 3 : ☆

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x + 2 &= 3 \\ x + 2 - 2 &= 3 - 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 8 &= 12 \\ y - 8 + 8 &= 12 + 8 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 1 &= 11 \\ x + 1 - 1 &= 11 - 1 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + 2 &= -14 \\ z + 2 - 2 &= -14 - 2 \\ z &= -16 \end{aligned}$$

🔊 Exercice 4 : ☆

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -10 + a &= 23 \\ -10 + a + 10 &= 23 + 10 \\ a &= 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5 + x &= -9 \\ -5 + x + 5 &= -9 + 5 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 - h &= 0 \\ 3 - h + h &= 0 + h \\ h &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 + t &= -8 \\ 7 + t - 7 &= -8 - 7 \\ t &= -15 \end{aligned}$$

🔊 Exercice 5 : ☆

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} &= 11 & 7y &= 12 \\ \frac{x}{5} \times 5 &= 11 \times 5 & 7y \div 7 &= 12 \div 7 \\ x &= 55 & y &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{11} &= -5 & \frac{a}{-5} &= 6 \\ \frac{z}{11} \times 11 &= -5 \times 11 & \frac{a}{-5} \times (-5) &= 6 \times (-5) \\ z &= 55 & a &= -30 \end{aligned}$$

🔊 Exercice 6 : ☆

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -9h &= 5 & -\frac{y}{6} &= -3 \\ -9h \div (-9) &= 5 \div (-9) & -\frac{y}{6} \times (-6) &= -3 \times (-6) \\ h &= -\frac{5}{9} & y &= 18 \end{aligned}$$

Exercice 7 : ☆☆

Résoudre les équations suivantes :

$$4x + 3 = 9$$

$$4x + 3 \times (-3) = 9 \times (-3)$$

$$4x = 6$$

$$4x \div 4 = 6 \div 4$$

$$x = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$3x + 5 = 7$$

$$3x + 5 \times (-5) = 7 \times (-5)$$

$$3x = 2$$

$$3x \div 3 = 2 \div 3$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{3} - 4 = -2$$

$$\frac{x}{3} - 4 + 4 = -2 + 4$$

$$\frac{x}{3} = 2$$

$$\frac{x}{3} \times 3 = 2 \times 3$$

$$x = 6$$

Exercice 8 : ☆☆

Résoudre les équations suivantes :

$$5x + 3 = 2x - 7$$

$$5x + 3 - 3 = 2x - 7 - 3$$

$$5x = 2x - 10$$

$$5x - 2x = 2x - 10 - 2x$$

$$3x = -10$$

$$3x \div 3 = -10 \div 3$$

$$x = -\frac{10}{3}$$

$$\frac{2x - 3}{5} = 7$$

$$\frac{2x - 3}{5} \times 5 = 7 \times 5$$

$$2x - 3 = 35$$

$$2x - 3 + 3 = 35 + 3$$

$$2x = 38$$

$$2x \div 2 = 38 \div 2$$

$$x = 19$$

$$4x + 5 = 3 - 3x$$

$$4x + 5 - 5 = 3 - 3x - 5$$

$$4x = -2 - 3x$$

$$4x + 3x = -2 - 3x + 3x$$

$$7x = -2$$

$$7x \div 7 = -2 \div 7$$

$$x = -\frac{2}{7}$$

Exercice 9 : ☆☆☆

Résoudre l'équation $\frac{4(x+2)}{7} = 28$ avec le moins d'étapes possible :

$$\frac{4(x+2)}{7} \times \frac{7}{4} = 28 \times \frac{7}{4} \text{ donc } x + 2 = 49 \text{ et au final :}$$

$$x = 49 - 2 = 47$$

Exercice 10 : ☆☆

Développer puis résoudre les équations suivantes :

$$4(x + 5) = 10x + 3$$

$$4 \times x + 4 \times 5 = 10x + 3$$

$$4x + 20 = 10x + 3$$

$$4x + 20 - 20 = 10x + 3 - 20$$

$$4x = 10x - 17$$

$$4x - 10x = 10x - 17 - 10x$$

$$-6x = -17$$

$$-6x \div (-6) = -17 \div (-6)$$

$$x = \frac{17}{6}$$

$$7(n + 2) - 3 = 25 - (3n + 4)$$

$$7 \times n + 7 \times 2 - 3 = 25 - 3n - 4$$

$$7n + 11 = 21 - 3n$$

$$7n + 11 - 11 = 21 - 3n - 11$$

$$7n = 10 - 3n$$

$$7n + 3n = 10 - 3n + 3n$$

$$10n = 10$$

$$10n \div 10 = 10 \div 10$$

$$n = 1$$

$$4y + 3(4y - 2) = 3(y + 1)$$

$$4y + 3 \times 4y - 3 \times 2 = 3 \times y + 3 \times 1$$

$$16y - 6 = 3y + 3$$

$$16y - 6 + 6 = 3y + 3 + 6$$

$$16y = 3y + 9$$

$$16y - 3y = 3y + 9 - 3y$$

$$13y = 9$$

$$13y \div 13 = 9 \div 13$$

$$y = \frac{9}{13}$$

Exercice 11 : ☆

Résoudre les équations suivantes :

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x - 5 + 5 = 0 + 5$$

$$x = 5$$

$$x + 3 = 0$$

$$x + 3 - 3 = 0 - 3$$

$$x = -3$$

$$\mathcal{S} = \{-3 ; 5\}$$

$$(7 - x)(x - 7) = 0$$

$$7 - x = 0$$

$$7 - x + x = 0 + x$$

$$x = 7$$

$$x - 7 = 0$$

$$x - 7 + 7 = 0 + 7$$

$$x = 7$$

$$\mathcal{S} = \{7\}$$

Exercice 12 : ☆☆☆

Résoudre les équations suivantes :

$$(5x + 2)(2x - 1) = 0$$

$$5x + 2 = 0$$

$$5x + 2 - 2 = 0 - 2$$

$$5x = -2$$

$$5x \div 5 = -2 \div 5$$

$$x = -\frac{2}{5} = -0,4$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x - 1 + 1 = 0 + 1$$

$$2x = 1$$

$$2x \div 2 = 1 \div 2$$

$$x = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\mathcal{S} = \{-0,4 ; 0,5\}$$

$$(12 - 5x)(-x + 6) = 0$$

$$12 - 5x = 0$$

$$12 - 5x - 12 = 0 - 12$$

$$-5x = -12$$

$$-5x \div (-5) = -12 \div (-5)$$

$$x = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$-x + 6 = 0$$

$$-x + 6 - 6 = 0 - 6$$

$$-x = -6$$

$$-x \times (-1) = -6 \times (-1)$$

$$x = 6$$

$$\mathcal{S} = \{2,4 ; 6\}$$

$$x^2 - 81 = 0$$

$$x^2 - 9^2 = 0$$

$$(x - 9)(x + 9) = 0$$

$$x - 9 = 0$$

$$x - 9 + 9 = 0 + 9$$

$$x = 9$$

$$x + 9 = 0$$

$$x + 9 - 9 = 0 - 9$$

$$x = -9$$

$$\mathcal{S} = \{-9 ; 9\}$$

$$4x^2 - 16 = 0$$

$$(2x)^2 - 4^2 = 0$$

$$(2x - 4)(2x + 4) = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x - 4 + 4 = 0 + 4$$

$$2x = 4 \text{ donc } x = 2$$

$$2x + 4 = 0$$

$$2x + 4 - 4 = 0 - 4$$

$$2x = -4 \text{ donc } x = -2$$

$$\mathcal{S} = \{-2 ; 2\}$$

$$x^2 + 4 = 104$$

$$x^2 - 100 = 0$$

$$x^2 - 10^2 = 0$$

$$(x - 10)(x + 10) = 0$$

$$x - 10 = 0$$

$$x - 10 + 10 = 0 + 10$$

$$x = 10$$

$$x + 10 = 0$$

$$x + 10 - 10 = 0 - 10$$

$$x = -10$$

$$\mathcal{S} = \{-10 ; 10\}$$

$$3x^2 = 108$$

$$x^2 = 108 \div 3 = 36$$

$$x^2 - 6^2 = 0$$

$$(x - 6)(x + 6) = 0$$

$$x - 6 = 0$$

$$x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$x = 6$$

$$x + 6 = 0$$

$$x + 6 - 6 = 0 - 6$$

$$x = -6$$

$$\mathcal{S} = \{-6 ; 6\}$$

Exercice 14 : ☆☆☆

Exercice 13 : ☆☆☆

Marc achète une gomme à 2,35 € et 3 stylos. Il paye en tout 8,80 €. Déterminer le prix d'un stylo.

Posons x le prix d'un stylo. Nous avons donc :

$$2,35 + 3x = 8,8$$

$$2,35 + 3x - 2,35 = 8,8 - 2,35$$

$$3x = 6,45$$

$$3x \div 3 = 6,45 \div 3$$

$$x = 2,15$$

Le prix d'un stylo est donc de 2,15 €.

Dans 42 ans, Chiara aura quatre fois son âge actuel. Quel est l'âge de Chiara ?

Posons x l'âge de Chiara actuellement. Nous avons donc :

$$x + 42 = 4x$$

$$x + 42 - 42 = 4x - 42$$

$$x = 4x - 42$$

$$x - 4x = 4x - 42 - 4x$$

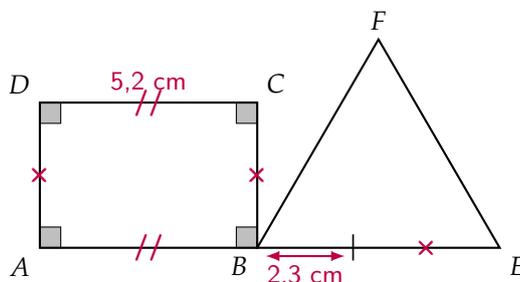
$$-3x = -42$$

$$-3x \div (-3) = -42 \div (-3)$$

$$x = 14$$

Chiara a donc 14 ans.

Exercice 15 : ☆☆☆



Le rectangle $ABCD$ et le triangle équilatéral BEF ont le même périmètre.

Déterminer AD puis en déduire BE .

Posons $x = AD$. Nous avons donc :

$$2x + 2 \times 5,2 = 3 \times (2,3 + x)$$

$$2x + 10,4 = 6,9 + 3x$$

$$2x + 10,4 - 10,4 = 6,9 + 3x - 10,4$$

$$2x = -3,5 + 3x$$

$$2x - 3x = -3,5 + 3x - 3x$$

$$-x = -3,5$$

$$-x \times (-1) = -3,5 \times (-1)$$

$$x = 3,5$$

On a donc $AD = 3,5$ cm et on en déduit que $BE = 2,3 + 3,5 = 5,8$ cm.

✎ Exercice 16 : ☆☆☆

Yehya multiplie un nombre négatif par 2 puis ajoute 37. Léa ajoute 1 à ce même nombre et met le résultat au carré. Ils obtiennent chacun le même résultat final. Quel était le nombre de départ ?

Posons x le nombre négatif choisi par Yehya. Nous avons donc :

$$2x + 37 = (x + 1)^2$$

$$2x + 37 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$$

$$2x + 37 - 2x = x^2 + 2x + 1 - 2x$$

$$37 = x^2 + 1$$

$$37 - 1 = x^2 + 1 - 1$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 - 6^2 = 0$$

$$(x + 6)(x - 6) = 0$$

$$\mathcal{S} = \{-6 ; 6\}$$

Comme c'était négatif, le nombre choisi était donc -6 .

