Séquence 8 : Notion de fonction

✎ ✎ ✎ **OBJECTIFS :** ✎ ✎ ✎

À la fin de cette Séquence 8, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Les définitions de « image » et « antécédent ».	Cours partie A
Les différentes représentations d'une fonction.	Cours partie B

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Utiliser le vocabulaire des fonctions.	n°1, 2		
Retrouver l'image ou l'antécédent d'un nombre à l'aide d'un calcul.	n°3	n°4	n°5
Retrouver l'image ou l'antécédent d'un nombre à l'aide d'un tableau ou d'un graphique.	n°6	n°7	n°8
Résoudre un problème à l'aide d'une fonction.		n°9	n°10

Les fonctions sont des objets mathématiques très importants. Elles servent à modéliser de nombreux phénomènes, qu'ils soient physiques, biologiques, technologiques ou économiques par exemple.

A) Définitions

Définition 1 : Fonction

Une **fonction** f est un *processus* qui à un nombre x associe un UNIQUE nombre $f(x)$ qui se lit « f de x ». On note :

$$f : x \mapsto f(x)$$

« La fonction f qui à x associe f de x. »

☞ **Exemple(s) :**

1) Quelle est la fonction qui à un nombre x associe son double ?

$$\mathbf{f(x) = 2x}$$

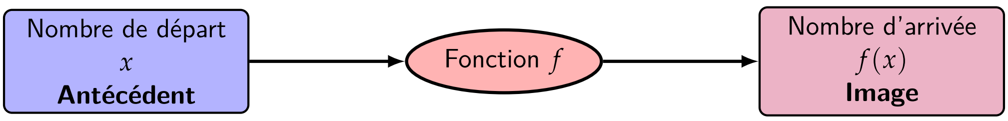
2) Quelle est la fonction qui à un nombre x associe la somme de son carré et de son triple ?

$$\mathbf{f(x) = x^2 + 3x}$$

Définition 2 : Image/antécédent d'un nombre par une fonction

Soit la fonction $f : x \mapsto f(x)$. Alors :

- ☞ Le nombre $f(x)$ est l'**image de x par la fonction f.**
- ☞ Le nombre x est un **antécédent de $f(x)$ par la fonction f.**



☞ **Exemple(s) :**

1) Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 6$. Quelles sont les **images** de 0, de -2 et de -6 par f ?

$\mathbf{f(0)} = 0^2 + 6 = \mathbf{6}$; $\mathbf{f(-2)} = (-2)^2 + 6 = 4 + 6 = \mathbf{10}$; $\mathbf{f(-6)} = (-6)^2 + 6 = 36 + 6 = \mathbf{42}$

2) Soit la fonction $g : x \mapsto x^2$. Quelles sont les **antécédents** de 0, de 9 et de -4 par g ?

$\mathbf{0} = 0^2 = \mathbf{f(0)}$; $\mathbf{9} = 3^2 = \mathbf{f(3)}$; $\mathbf{-4}$ n'est le carré d'aucun nombre donc -4 **n'a pas d'antécédent par** f.

Remarque : Un nombre a toujours **une seule image** par une fonction f. Par contre, un nombre peut avoir **aucun, un ou plusieurs antécédents** par une fonction f.

B) Représentations

Une fonction est généralement définie par sa « formule » (comme dans les exemples ci-dessus), mais elle peut être représentée de diverses manières, qui aident à mieux la visualiser, la comprendre, à trouver l'image ou l'antécédent de certaines valeurs… Cela permet aussi de comparer les fonctions entre elles par exemple. Dans cette partie nous allons considérer la fonction h suivante qui **à un nombre associe son carré moins 5**.

1. Le tableau

On peut représenter une fonction avec un tableau de quelques unes de ses valeurs :

x	-6	-1	0	2	6	10
$h(x)$	$\mathbf{31}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{31}$	$\mathbf{95}$

En utilisant le tableau ci-dessous, réponds aux questions suivantes :

1) Quelles sont les images de -6 et de 2 ?

D'après le tableau, L'image de -6 est 31, et l'image de 2 est -1.

2) Quels sont les antécédents de -5, de 95 et de 31 ?

D'après le tableau, -5 a pour antécédent 0, 95 a pour antécédent 10 et 31 a pour antécédents -6 et 6.

2. Le graphique

Définition 3 : Courbe représentative

Dans un repère, la **courbe représentative** (ou **représentation graphique**) d'une fonction h est l'ensemble des points de coordonnées $(\mathbf{x}; \mathbf{h}(\mathbf{x}))$.

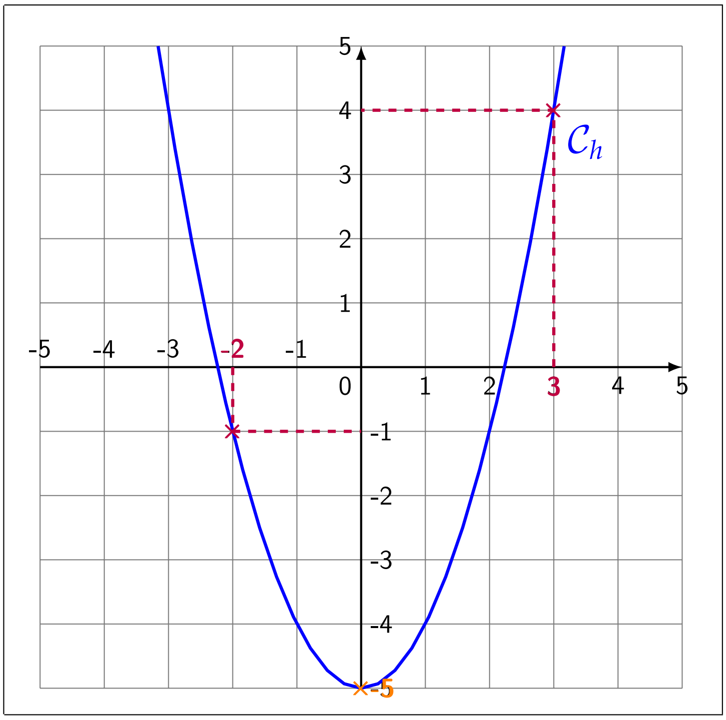
On note généralement cette courbe représentative $\mathcal{C}_h$.

Sur l'axe des **abscisses** on peut lire :

x, l'antécédent de $h(x)$.

Sur l'axe des **ordonnées** on peut lire :

$h(x)$, l'image de x.



Exemple(s) :

1) Donner **graphiquement** l'**image** de 3 et de -2 :

$$\mathbf{h(3) = 4} \quad \text{et} \quad \mathbf{h(-2) = -1}$$

1) Donner **graphiquement** l'**antécédent** de -5 :

$$\mathbf{-5 = h(0)}$$

Exercices

☞ Exercice 1 : ☆

Une fonction f est telle que $f(-3) = 4$. Traduire cette égalité par une phrase contenant...

1) ... le mot « image » :
4 **est l'image de** -3 **par la fonction** f**.**

2) ... le mot « antécédent » :
-3 **est un antécédent de** 4 **par la fonction** f**.**

☞ Exercice 2 : ☆

Traduire les phrases suivantes par une égalité :

1) « L'image de 3 par la fonction f est -5 » : $\mathbf{f(3) = -5}$

2) « -4 est un antécédent de 7 par la fonction g » : $\mathbf{g(-4) = 7}$

☞ Exercice 3 : ☆

Parmi les fonctions suivantes, entourer celle(s) qui, à un nombre x, associe son triple :

$f : x \mapsto x + 3$	$\boxed{g(x) = 4x - x = \mathbf{3x}}$	$\boxed{h : x \mapsto 3x}$
$j(x) = 3x^2$	$\boxed{k(x) = 3x}$	$l : x \mapsto -3x$

☞ Exercice 4 : ☆☆

- ☞ Prendre un nombre x
- ☞ Le multiplier par 2
- ☞ Ajouter 5 au résultat
- ☞ On obtient $h(x)$

On donne le programme de calcul ci-contre.

1) Exprimer $h(x)$ en fonction de x : $\rightarrow \mathbf{h(x) = 2x + 5}$

2) Quelle est l'image de $\frac{1}{3}$ par h ? $\rightarrow \mathbf{h(\frac{1}{3}) = 2 \times \frac{1}{3} + 5 = \frac{17}{3} \approx 5,67}$

3) Donner le(s) antécédent(s) de 9 par la fonction h :

$2x + 5 = 9 \quad \Rightarrow \quad 2x + 5 - 5 = 9 - 5 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4$

$\Rightarrow \quad 2x \div 2 = 4 \div 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 2}$

2 est l'unique antécédent de 9 par la fonction h.

☞ Exercice 5 : ☆☆☆

- ☞ Choisir un nombre
- ☞ Prendre son carré
- ☞ Ajouter 4 au résultat
- ☞ Prendre l'inverse du nombre obtenu

On donne le programme de calcul ci-contre.

1) a. Quel nombre obtient-on si on choisit 1 comme nombre de départ ?

$1 \rightarrow 1^2 = 1 \rightarrow 1 + 4 = 5 \rightarrow \mathbf{\frac{1}{5}}$

b. Quel nombre obtient-on si on choisit x comme nombre de départ ?

$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 + 4 \rightarrow \mathbf{\frac{1}{x^2 + 4}}$

2) En déduire la fonction g correspondant à ce programme de calcul :

$\mathbf{g : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4}}$

3) a. Donner l'image de 2 par la fonction g : $\rightarrow \mathbf{g(2) = \frac{1}{2^2 + 4} = \frac{1}{8}}$

b. Calculer $g(-1)$: $\rightarrow \mathbf{g(-1) = \frac{1}{(-1)^2 + 4} = \frac{1}{5}}$

c. 0 a-t-il un antécédent par la fonction g ? Pourquoi ?

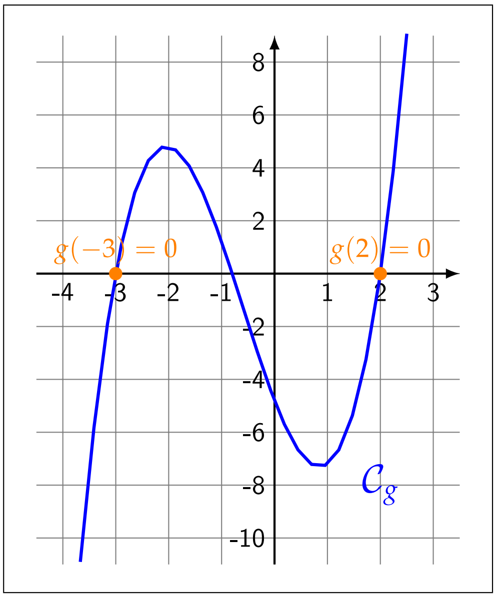
Non, car il faudrait trouver un nombre x tel que $\frac{1}{x^2 + 4} = 0$, donc il faudrait que l'inverse de $x^2 + 4$ fasse 0. Or aucun nombre n'a pour inverse 0.

Exercice 6 : ☆

On donne $f(x) = 2x^2$. compléter le tableau ci-dessous :

x	0	-1	2	-2
$f(x)$	$2 \times 0^2 = \mathbf{0}$	$2 \times (-1)^2 = \mathbf{2}$	$2 \times 2^2 = \mathbf{8}$	$2 \times (-2)^2 = \mathbf{8}$

Exercice 7 : ☆☆



Voici la courbe représentative d'une fonction g ci-contre.

Est-il vrai que $g(-3) = g(2)$? Justifier.

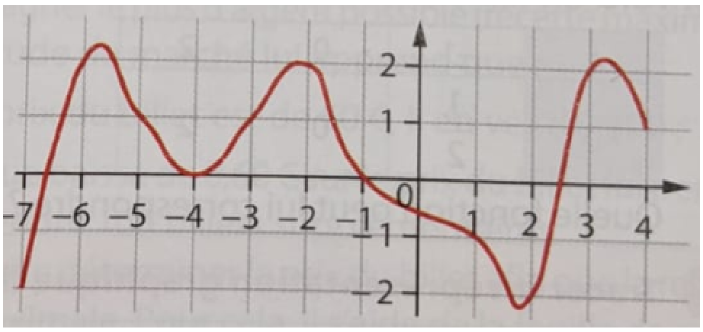
On peut lire graphiquement que :

$$\begin{cases} g(-3) = 0 \\ g(2) = 0 \end{cases}$$

Donc on a bien $g(-3) = g(2)$.

Exercice 8 : ☆☆☆

Voici la courbe d'une fonction f :



Déterminer graphiquement, quand c'est possible :

1) l'image de -1 : $\rightarrow$ **0**

2) un antécédent de 2 : $\rightarrow$ $\mathbf{-6}$; $\mathbf{-5,5}$; $\mathbf{-2}$; $\mathbf{3}$; $\mathbf{3,5}$

3) $f(-6)$: $\rightarrow$ **2**

4) des antécédents de 1 : $\rightarrow$ $\mathbf{-6,5}$; $\mathbf{-5}$; $\mathbf{-3}$; $\mathbf{-1,5}$; $\mathbf{2,5}$; $\mathbf{4}$

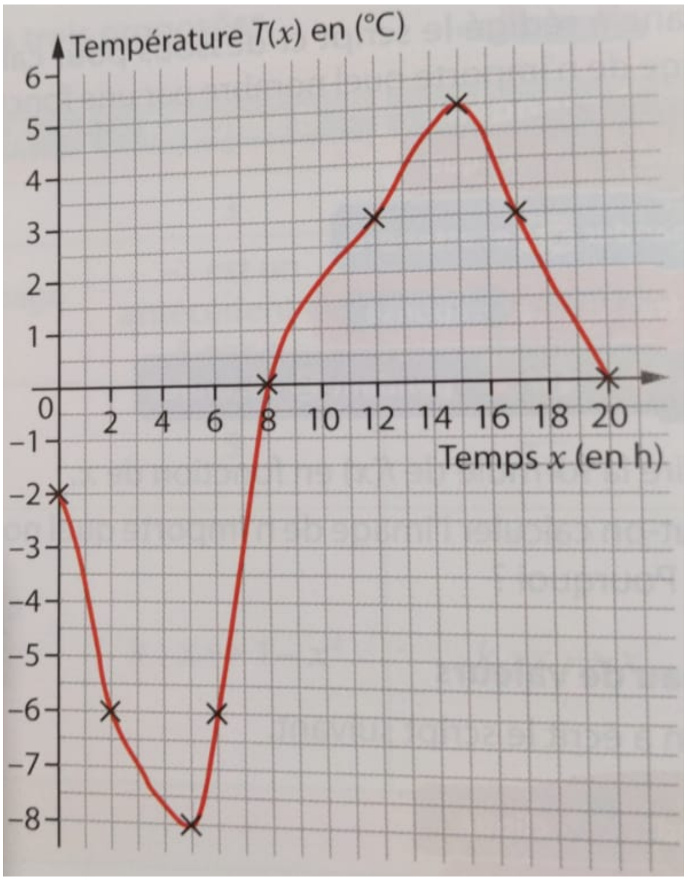
5) un nombre qui a pour image 3 : **Impossible**

6) un nombre qui a pour antécédent 2 : $\rightarrow$ $\mathbf{-2}$

7) une solution de l'équation $f(x) = 0$:
Il s'agit des valeurs de x telles que $\mathcal{C}_g$ touche l'axe des abscisses donc par exemple $-6,5$, -4, -1 ou $2,5$.

Exercice 9 : ☆☆

À l'aide de sa station météo, Jessie a enregistré la température $T(x)$ en fonction du temps x entre minuit et 20 heures le 9 février 2015. Elle est représentée ci-contre.



1) Quelle était la température à midi ce jour-là ? → **3°C**

2) Lire graphiquement $T(17)$. Que représente cette valeur ?

$$\mathbf{T(17) = 3}$$

Il s'agit de la température à 17 h (qui était donc de 3°C).

3) Résoudre graphiquement $T(x) = 0$. Que représentent la ou les solutions trouvées ?

$$T(x) = 0 \text{ si } \mathbf{x = 8} \text{ ou } \mathbf{x = 20}$$

La température était de 0°C à 8 h et à 20 h.

4) Donner l'image de 0 par la fonction T. Que représentent la ou les solutions trouvées ?

$$\mathbf{T(-2) = 0}$$

La température à minuit (0 h) était de -2°C.

5) Donner le ou les antécédents de -6 par la fonction T. Que représentent ces valeurs ?

$$\mathbf{T(2) = -6} \text{ et } \mathbf{T(6) = -6}$$

La température était de -6°C à 2 h et à 6 h.

6) Quand la température était-elle positive ce jour-là ?
La température était positive entre 8 h et 20 h.

Exercice 10 : ☆☆☆

Un groupe de 100 personnes vont ensemble au restaurant. Elles ont le choix entre 2 formules : une à 20 € et l'autre à 25 €.

1) On appelle x le nombre de personnes choisissant le menu à 20 €. Exprimer le montant de l'addition $A(x)$ en fonction de x :

- x personnes prennent le menu à 20 € ⇒ cela coûte $20x$ € ;
- donc $100 - x$ personnes prennent le menu à 25 € ⇒ cela coûte $25(100 - x)$ €.

$$\Rightarrow \quad A(x) = 20x + 25(100 - x) = 20x + 2\,500 - 25x = \mathbf{-5x + 2\,500}$$

2) Le montant de l'addition est de 2 185 €. Combien de personnes ont choisi le menu à 20 € ?

On cherche x tel que $A(x) = 2\,185$, c'est-à-dire :

$$-5x + 2\,500 = 2\,185$$

$$-5x + 2\,500 - 2\,500 = 2\,185 - 2\,500$$

$$-5x = -315$$

$$-5x \div (-5) = -315 \div (-5)$$

$$x = 63$$

Il y a donc 63 personnes qui ont pris le menu à 20 €.

Mises au Travail