125 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique. Applications.

Pré-requis : Soit $\vec{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Déf : E est un espace affine de direct° $\vec{E}$ si c'est un ens. non vide muni d'une action libre et transitive :

$$\begin{aligned} E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ (x,u) &\longmapsto x+u \end{aligned}$$

Les él. de E st appelés points

Déf : E, F 2 esp. affines.
$f : E \to F$ est affine si $\exists \vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ linéaire tq $\forall (A,B) \in E^2$:

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$$

$\vec{f}$ est la partie linéaire de f.

Ex :

- Translat° : $v \in \vec{E}$

$$\begin{aligned} t_v : E &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto M+v \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{t_v} = id_{\vec{E}}$

Déf : Un e.v. E est dit <u>euclidien</u> s'il est réel, de dimension finie, et muni d'un <u>produit scalaire</u> (= forme bilin. sym. déf. pos. $\langle .,. \rangle$)

Déf : L'espace affine E de directᵒ $\vec{E}$ est <u>euclidien</u> si $\vec{E}$ est un e.v. euclidien.

On note $O(E)$ le gpe orthogonal :

$$O(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \}$$

$$= \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| \}$$

Les éléments de $O(E)$ sont appelés endomorphismes orthogonaux ou isométries vectorielles.

Généralités sur les isométries de E :