Leçon 125 : Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3. Décomposition canonique. Applications.

Soit $\overrightarrow{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, et E un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
Soit f une isométrie affine de partie linéaire $\vec{f}$.

1) Généralités sur les isométries de E.

On suppose ici $dim(E) = n$.

Définition 1 : $f : E \to E$ est une **isométrie** de E si c'est une bijection qui conserve les distances.

Propriété 2 : L'ensemble $Isom(E)$ des isométries de E est un sous-groupe de $S(E)$ pour la composition $\circ$.

Théorème 3 : Toute isométrie de E est la composée d'au plus $n+1$ réflexions. En particulier, elle est affine.

Définition 4 : f est une isométrie affine :

- **directe** (un **déplacement**) si $\det(\vec{f}) = +1$. On note $\vec{f} \in Isom^+(E)$.
- **indirecte** (un **anti-déplacement**) si $\det(\vec{f}) = -1$. On note $\vec{f} \in Isom^-(E)$.

Propriété 5 : $Isom^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $Isom(E)$.

Théorème 6 : Décomposition canonique
Toute isométrie f de E s'écrit de manière unique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$ et $g \in Isom(E)$ a un point fixe.

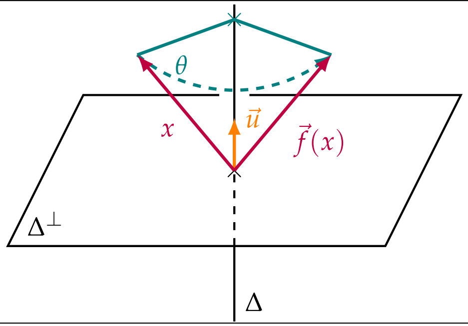
Application 7 : Groupe des isométries du cube (DÉV)
On note C l'ensemble des 8 sommets d'un cube. Alors on a :

$$Isom(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

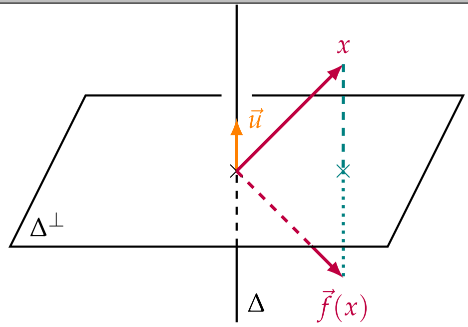
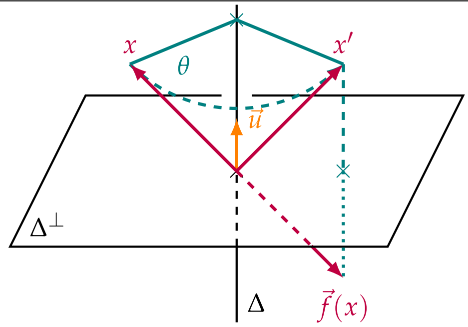
2) Application : classification des isométries vectorielles en dimension 3.

$\vec{f}$ admet une valeur propre ± 1. Soit $\vec{u_0}$ un vecteur propre de la valeur propre $+1$ et $\vec{u} = \frac{\vec{u_0}}{\|\vec{u_0}\|}$.

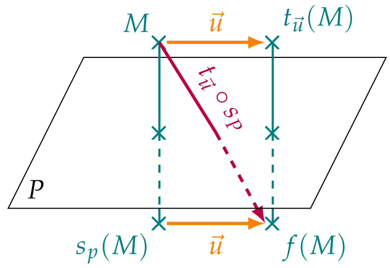
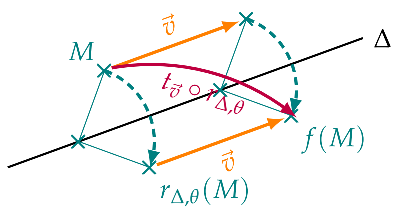
a. Isométries directes : $\det(\vec{f}) = +1$

Nom	$\dim\left(\ker(\vec{f} - id_{\overrightarrow{E}})\right)$	Matrice	Dessin
Identité $id_{\overrightarrow{E}}$	3	I_3	
Rotation d'axe Δ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$	1	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right)$	

b. Isométries indirectes : $\det(\vec{f}) = -1$

Nom	$\dim\left(\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})\right)$	Matrice	Dessin
Réflexion de plan $\Delta^\perp$	2	$\begin{pmatrix} 1 & \vline & 0 & 0 \\ \hline 0 & \vline & 1 & 0 \\ 0 & \vline & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
Anti-rotation d'axe Δ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$	0	$\begin{pmatrix} -1 & \vline & 0 & 0 \\ \hline 0 & \vline & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \vline & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$	

3) Application : classification des isométries affines en dimension 3.

$\vec{f}$	$\dim\left(\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})\right)$	Avec points fixes	Sans points fixes
Identité $id_{\vec{E}}$	3	id_E	Translation $t_{\vec{u}}$ ($\neq id_E$)
Réflexion	2	Réflexion s_P (symétrie par rapport à P)	Réflexion glissée de plan P et de vecteur $\vec{u} \in \vec{P}$: $t_{\vec{u}} \circ s_P$ 
Rotation	1	Rotation $r_{\Delta,\theta}$	Vissage d'axe Δ orienté par $\vec{v}$ et d'angle θ : $t_{\vec{v}} \circ r_{\Delta,\theta}$ 
Symétrie-rotation	0	Symétrie (par rapport à $\Delta^\perp$) rotation d'axe Δ et d'angle θ	

Sources :

- [SKA A1G] G. Skandalis. (2017). *Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie.* Collection Im-et-Ker. Calvage & Mounet.
- [ROM] J.-É. Rombaldi. (2021). *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie* (2e édition). De Boeck Supérieur.
- Cours de Catherine Gilles du 18/01/2023.