150) Diverses factorisations de matrices. Applications.

Rmq : On se concentre sur les factorisations des matrices inversibles.

Notations :

* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
* $T_n^{++}{}_{s/i}(\mathbb{K})$: triangulaires sup/inf. à coefs. (strict.) pos. diagonaux
* $S_n^{++}(\mathbb{K})$: symétriques (définies) positives.
* $GL_n(\mathbb{K})$: inversibles
* $SL_n(\mathbb{K})$: de déterminant 1.

I Systèmes générateurs.

1 Matrices élémentaires :

Définition : Matrices de :

* Transvection : $i,j \in [\![1;n]\!]$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{ij}$$

* Dilatation : $i \in [\![1;n]\!]$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$:

$$D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1) \cdot E_{ii}$$

Rmq/ppté :
→ $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$
→ $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(1/\alpha)$
→ $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$
→ $\det(D_i(\alpha)) = \alpha$

Théorème :
1. $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par $\underbrace{\{T_{ij}(\lambda) \mid i,j \in [\![1;n]\!], i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}^*\}}_{\text{l'ens. des transvections}}$.
2. $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par l'ensemble des transvections et dilatations.

(Skandalis p.205) **Preuve** :

1. Par récurrence sur n :

* Initialisation : Pour $n=1$, $SL_1(\mathbb{K}) = \{(1)\}$ or (1) est le produit de 0 transvections.
* Hérédité : Soit $n \geq 2$ tq 1 vraie pour $n-1$.
  Soit $A \in SL_n(\mathbb{K})$.
  On veut écrire $A = SBT$ avec :
  → S et T produits de transvections
  → $B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$ avec $A \in SL_{n-1}(\mathbb{K})$.

On aura alors :

* $\det(S) = \det(T) = 1$ car $\det(\text{transvection}) = 1$.

$\Rightarrow \det(B) = \det(A) = 1$ car $A \in SL_n(\mathbb{K})$

* Par hypothèse de récurrence, comme A_1 est de dimension $n-1$, c'est un produit de transvections.

Donc B aussi, donc A aussi, d'où (1).

Reste à voir comment passer de A à B, par transvections sur les lignes (mult. à gauche) et les colonnes (mult. à dte) :

a) $a_{11} = 1$: On effectue des $\begin{cases} L_j \rightsquigarrow L_j - a_{j1} L_1 \\ C_j \rightsquigarrow C_j - a_{1j} C_1 \end{cases}$

b) $a_{11} \neq 1$ et $\exists i \geq 2$ tq $a_{i1} \neq 0$:

On effectue des $L_1 \rightsquigarrow L_1 + cL_i$ avec c tq $a_{11} + c \cdot a_{i1} = 1$, et on se ramène à a).

c) $a_{11} \neq 1$ et $a_{i1} = 0 \ \forall i \neq 1$:

On effectue un $L_2 \rightsquigarrow L_2 + L_1$, ce qui nous ramène à b).

(2) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Soit $d = \det(A)$ et $B = A \cdot D_n(d)^{-1}$.

On $\det(D_n(d)) = d = \det A \Rightarrow \det(B) = 1$

$\Rightarrow B \in SL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow B$ est produit de transvections

$\Rightarrow A$ est produit d'une dilatation et de transvect$^{\circ}$s.

$\boxtimes$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[T_{21}(-2)]{L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[D_2(-\frac{1}{5})]{L_2 \rightsquigarrow -\frac{1}{5}L_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[T_{12}(-3)]{L_1 \rightsquigarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[D_1(-1)]{L_1 \rightsquigarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad I_n = A \cdot T_{21}(-2) \cdot D_2(-\frac{1}{5}) \cdot T_{12}(-3) \cdot D_1(-1)$

$\Rightarrow \quad A = D_1(-1) \cdot T_{12}(3) \cdot D_2(-5) \cdot T_{21}(2)$

Application (Skandalis exo 7.11, q. 2) :

$SL_n(\mathbb{K})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

"Définition" : 2 pts de l'espace peuvent être "reliés" par un chemin continu.

Preuve :

* Soit $A \in SL_n$.

Par le thm, on peut écrire :

$A = T_1(\lambda_1) \cdots T_N(\lambda_N)$ pdt de transvect$^{\circ}$s

Alors si on pose :

$$A_t = T_1(t\lambda_1) \cdots T_N(t\lambda_N)$$

$A_0 = I_n$ et $A_1 = A$, A_t est donc un chemin continu tracé dans $SL_n(\mathbb{K})$ qui rejoint I_n à A, donc A est dans la composante connexe par arcs de I_n de $SL_n(\mathbb{K})$.

* $SL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K} \to GL_n(\mathbb{K})$ est un homéomorphisme d'inverse :
$(A, \alpha) \mapsto A \cdot D_n(\alpha)$ $\qquad B \mapsto BD_n\left((\det B)^{-1}, \det B\right)$.

Donc :

- $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
- $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes selon le signe du déterminant.

$\square$

$\boxed{II}$ Factorisations et matrices triangulaires

(Ramb. p. 690) **Thm: Décomposition LU**

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition LU avec :
→ L une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité ;
→ U une matrice triangulaire supérieure.
$\boxed{\text{ssi}}$ ts les déterminants principaux de A sont non nuls.
Quand elle existe, cette décomposition est unique.

Définition: Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les sous-matrices principales de A sont :
$A_k = (a_{ij})_{i,j \in [\![1;k]\!]}$, $k \in [\![1;n]\!]$
Les déterminants principaux de A sont :
$\Delta_k = \det(A_k)$, $k \in [\![1;n]\!]$.

Preuve : Par récurrence sur $n \geq 1$.
* Initialisation : Si $n = 1$, $A = (a)$ avec $a \neq 0$ donc $\det(A) \neq 0$ et $A = LU$ avec $L = (1)$ et $U = (a)$.
* Hérédité : Supposons le résultat acquis pour $n-1$, $n \geq 2$.

* Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ayant ts ses déterminants principaux non nuls.
On écrit :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{nn} \in \mathbb{K} \\ A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \\ B_1 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}) \\ C_1 \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

A_1 est une ss-matrice principale de A donc $\det(A_1) \neq 0$, et même $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ avec tous ses déterminants principaux non nuls. De plus $a_{nn} \neq 0$.

Par hypothèse de récurrence,

$\left.\begin{array}{l} \exists L_1 \text{ triang. inf. à diag. unité} \\ \exists \underbrace{U_1}_{\in GL_{n-1}(\mathbb{K})} \text{ triang. sup.} \end{array}\right\}$ tq $A_1 = L_1 U_1$

On pose alors : $L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ D_1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} U_1 & E_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

avec $D_1 \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, $E_1 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ à déterminer.

$$A = LU \iff \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1U_1 & L_1E_1 \\ D_1U_1 & \alpha + D_1E_1 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} L_1E_1 = B_1 \\ D_1U_1 = C_1 \iff {}^tU_1\,{}^tD_1 = {}^tC_1 \\ a_{nn} = \alpha + D_1E_1 \iff \alpha = a_{nn} - D_1E_1 \end{cases}$$

- L_1 inversible $\Rightarrow$ le syst. linéaire $L_1E_1 = B_1$ a une unique solution $E_1 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n-1}$.
- U_1 inversible $\Rightarrow$ le syst. lin. $D_1U_1 = C_1$ a une unique solut° $D_1 \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ α est également défini de manière unique.

Ainsi on a l'existence ~~et l'unicité~~ de la décomposit° LU.

* Réciproquement, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomp. LU, alors U est inversible et la décomp. par blocs ci-dessus donne que ~~les~~ déterminants principaux de A sont non nuls, car :

$$\begin{cases} A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(A) \neq 0. \\ A_1 = L_1U_1 \text{ et } \det(L_1) = 1 \Rightarrow \det(A_1) = \det(U_1) = \dfrac{\det(U)}{\alpha} \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_1$ est inversible.

$\Rightarrow$ ts les dét. princ. de A_1 sont non nuls par hyp. de récurrence.

* Unicité de la décomposition quand elle existe :

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = L_1U_1 = L_2U_2$ avec L_i, U_i définies comme dans l'énoncé. Toutes les matrices sont considérées inversibles donc :

$$\underbrace{L_2^{-1}L_1}_{\text{triang. inf à diag. unité}} = \underbrace{U_2U_1^{-1}}_{\text{triang. sup}} \Rightarrow L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 \\ U_1 = U_2 \end{cases}$$

Thm : Décomposition de Cholesky

Toute matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ admet une unique décomposition $A = {}^tPP$, où $P \in T_n^{++}(\mathbb{R})$.

Définition: $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
$\Leftrightarrow$ A est une matrice symétrique définie positive
$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n : {}^tXAX > 0$.
$\Leftrightarrow$ A est la matrice d'un produit scalaire.

Preuve :

- $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ dc on peut lui associer un pdt scalaire $(\cdot|\cdot)$.

D'où :

$$A = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n|e_1) & \cdots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}$$

Les ss-matrices principales de A sont donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$:

$$A_k = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_k|e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_k|e_1) & \cdots & (e_k|e_k) \end{pmatrix}.$$

A_k est donc la matrice de $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, elle est donc définie positive et inversible.

En appliquant le thm de Décomposition LU :

$\exists (L,U)$ tq $A = LU$ avec :
→ L triangulaire inférieure à diag. unité
→ $U \in T_n^+(\mathbb{R})$.

Soit :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ x & \ddots & \\ \vdots & & \\ x & \cdots\, x & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & x & \cdots & x \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & x \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

On pose la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\left((\sqrt{u_{ii}})_{i \in [\![1;n]\!]}\right)$.
car $u_{ii} > 0$ car $\prod_{i=1}^{n} u_{ii} = \det(A) > 0$.

Posons alors $\begin{cases} B = LD \in T_{n_I}^+(\mathbb{R}) \\ C = D^{-1}U \in T_{n_S}^+(\mathbb{R}) \end{cases}$, ce qui vérifie $\underline{A = BC}$.

Or ${}^tA = A$ donc $BC = {}^t(BC) \Rightarrow BC = {}^tC\,{}^tB$

$\Rightarrow BC({}^tB)^{-1} = {}^tC \Rightarrow \underbrace{\underbrace{C({}^tB)^{-1}}_{\in T_{n_S}^+(\mathbb{R})} = \underbrace{B^{-1}.{}^tC}_{\in T_{n_I}^+(\mathbb{R})}}_{\in \mathrm{diag}_n(\mathbb{R})}$.

De plus, $\forall i \in [\![1;n]\!]$: $\begin{cases} b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \underbrace{D_{ki}}_{\substack{0 \text{ si } k \neq i \\ \sqrt{u_{ii}} \text{ sinon}}} = \underbrace{L_{ii}}_{1} \sqrt{u_{ii}} = \sqrt{u_{ii}} \\ c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(D^{-1})_{ik}}_{\substack{0 \text{ si } k \neq i \\ \frac{1}{\sqrt{u_{ii}}} \text{ si } k=i}} U_{ki} = \frac{U_{ii}}{\sqrt{u_{ii}}} = \sqrt{u_{ii}} \end{cases}$

D'où $\forall i \in [\![1;n]\!]$: $b_{ii} = c_{ii} = \sqrt{u_{ii}}$

Donc $\left((B^{-1})\,{}^tC\right)_{ii} = 1 \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$, d'où :
$C\,({}^tB)^{-1} = B^{-1}.\,{}^tC = I_n \Rightarrow \underline{C = {}^tB}$

En posant $P = C$, on a bien $\underline{A = {}^tP P}$.

* **Unicité** : Si $A = {}^tP_1 P_1 = {}^tP_2 P_2$:

$\Rightarrow {}^tP_1 P_1 (P_2)^{-1} = {}^tP_2 \Rightarrow \underbrace{P_1 \cdot P_2^{-1}}_{\in T_{n_S}^+(\mathbb{R})} = \underbrace{({}^tP_1)^{-1} \cdot {}^tP_2}_{\in T_{n_I}^+(\mathbb{R})}$) diag.

$\Rightarrow \exists D$ diagonale tq $P_1 \cdot P_2^{-1} = D \Rightarrow P_1 = D \cdot P_2$

$\Rightarrow A = {}^tP_2\,{}^tD \cdot D \cdot P_2 = {}^tP_2 \cdot D^2 \cdot P_2$

P_2 inversible $\Rightarrow D^2 = I_n \Rightarrow d_{ii} = \pm 1 \ \forall i$
Or coefficients > 0 par hypothèse $\Rightarrow D = I_n$
$\Rightarrow P_1 = P_2$. ∎

c'est ça qui fait l'unicité !
(voir exo ci-dessous)

~~Exercice~~ :
Exemple : $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

① Écrire A sous la forme ${}^tPP$ avec la décomposition de Cholesky

② Résoudre le syst. linéaire $Ax = b$

① * ${}^tA = A \Rightarrow A$ est symétrique

* $A_1 = (1) \Rightarrow \Delta_1 = \det(A_1) = 1 > 0$.
* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = \det(A_2) = 5 - 1 = 4 > 0$

* $A_3 = A \Rightarrow \Delta_3 = \det(A) = 1 \times (5 \times 6 - 4 \times 4) + 1 \times (-1 \times 6 + 2 \times 4) + 2 \times (1 \times 4 - 5 \times 2) = 14 + 2 - 12 = 4 > 0$

$\Rightarrow$ On a bien $\underline{A \in S_3^{++}(\mathbb{R})}$.

On cherche donc P tq : $A = {}^tP.P$ avec $P \in T_{ms}^{++}(\mathbb{R})$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ 0 & p_{22} & p_{32} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}^2 & \underbrace{p_{11}}_{1}\underbrace{p_{21}}_{-1} & \underbrace{p_{11}}_{1}\underbrace{p_{31}}_{2} \\ \underbrace{p_{11}}_{1}\underbrace{p_{21}}_{-1} & \underbrace{p_{21}^2}_{1}+\underbrace{p_{22}^2}_{4} & \underbrace{p_{12}}_{-1}\underbrace{p_{31}}_{2}+\underbrace{p_{22}}_{2}\underbrace{p_{32}}_{-1} \\ \underbrace{p_{11}}_{1}\underbrace{p_{31}}_{2} & \underbrace{p_{21}}_{-1}\underbrace{p_{31}}_{2}+\underbrace{p_{22}}_{2}\underbrace{p_{32}}_{-1} & \underbrace{p_{31}^2}_{4}+\underbrace{p_{32}^2}_{1}+p_{33}^2 \end{pmatrix}$$

6 équations et 6 inconnues :

- $p_{11}^2 = 1 \Rightarrow \underline{p_{11} = 1}$ (car $p_{11} > 0$)
- $1 \times p_{21} = -1 \Rightarrow \underline{p_{21} = -1} \Rightarrow p_{21}^2 = 1$
- $1 \times p_{31} = 2 \Rightarrow \underline{p_{31} = 2} \Rightarrow p_{31}^2 = 4$
- $\overbrace{p_{21}^2}^{1} + p_{22}^2 = 5 \Rightarrow p_{22}^2 = 4 \Rightarrow \underline{p_{22} = 2}$ (car $p_{22} > 0$)
- $-2 + 2p_{32} = -4 \Rightarrow 2p_{32} = -2 \Rightarrow \underline{p_{32} = -1} \Rightarrow p_{32}^2 = 1$
- $5 + p_{33}^2 = 6 \Rightarrow p_{33}^2 = 1 \Rightarrow \underline{p_{33} = 1}$ (car $p_{33} > 0$)

Soit au final : $A = {}^tP\,P$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② $Ax = b \Rightarrow {}^tP\underbrace{Px}_{y} = b \Rightarrow \begin{cases} {}^tPy = b & (1) \\ Px = y & (2) \end{cases}$ + simples à résoudre ! car P triang.

(1) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_2 - y_1 = 1 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $Ax = b$. ▨

(Romb. p. 692) **Thm: Décomposition QR :**

Tte matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ admet une unique décomposition $A = QR$ avec Q orthogonale (${}^tQQ = Q{}^tQ = I$) et $R \in T_{ns}^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve :

* **Existence :** $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow M = {}^tA \cdot A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \exists B \in T_{nI}^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = B\,{}^tB$ (Cholesky)

$\Rightarrow {}^tA \cdot A = B \cdot {}^tB$. $\Rightarrow$ $Q = ({}^tA)^{-1} \cdot B$ est orthogonale car :

$${}^tQ \cdot Q = {}^tB \cdot A^{-1} \cdot ({}^tA)^{-1} \cdot B = {}^tB \cdot (\underbrace{{}^tA \cdot A}_{= M = B{}^tB})^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow {}^tQ \cdot Q = \underbrace{{}^tB({}^tB)^{-1}} \cdot \underbrace{B^{-1} B} = I_n.$$

D'où en posant $R = {}^tB \in T_{ns}^{++}(\mathbb{R})$:

$$Q \cdot R = ({}^tA)^{-1} \cdot B \cdot {}^tB = ({}^tA)^{-1} M = \underbrace{({}^tA)^{-1}\,{}^tA}_{I_n} \cdot A = A$$

On a bien $A = QR$.

* **Unicité :** si $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$

$\Rightarrow Q_1 R_1 R_2^{-1} = Q_2 \Rightarrow R_1 R_2^{-1} = Q_1^{-1} Q_2 := \Delta$.

$\Rightarrow \Delta \in T_{ns}^{++}(\mathbb{R})$ et orthogonale.

$\Rightarrow \Delta^{-1} = {}^t\Delta$ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure $\Rightarrow$ Δ^{-1} est diagonale et orthogonale.

$\Rightarrow \Delta_{ii} = \pm 1 \quad \forall i \in [\![1; n]\!]$.

De plus R_1, R_2 à coefs. diag. $> 0 \Rightarrow \Delta$ aussi

$\Rightarrow \Delta_{ii} = 1 \quad \forall i \in [\![1; n]\!] \Rightarrow \Delta = I_n. \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ R_1 = R_2 \end{cases}$ ▨

Thm : Décomposition d'Iwasawa :

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = QDR$ avec :

→ Q orthogonale

→ D diagonale à coefs. >0

→ R triangulaire sup. à coefs. diag $= 1$.

Preuve : On a la décomposition $A = QR$.

On écrit R sous la forme $R = DR'$ avec D diagonale à coefs >0 et R' triang. sup. à diag $=1$.

L'unité est donnée par l'unicité de QR. ☒

Applications de ces factorisations.

→ Résolut° de syst. lin. (voir exo + haut).

→ Calculs de déterminant.

$\boxed{III}$ Factorisations via la diagonalisation :

(Romb. p. 240) **Thm : Décomposition polaire :**

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec Ω orthogonale et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve :

* **Unicité :** Supposons $A = \Omega S$.

Alors $^tA\,A = {}^tS\,{}^t\Omega\,\Omega S = S^2$ car $\begin{cases} {}^tS = S \\ {}^t\Omega\,\Omega = I_n \end{cases}$

. S est donc la racine carrée positive de la matrice $^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\langle {}^tA\,Ax \mid x\rangle = \|Ax\|^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$.

. Ω est alors donnée par $\Omega = AS^{-1}$ (A inv. $\Rightarrow$ S inv.)

D'où l'unicité (s'il y a existence).

* **Existence :** $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc admet une unique racine carrée $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. En posant $\Omega = AS^{-1}$ on a bien

$$\begin{cases} A = \Omega S \\ {}^t\Omega\,\Omega = {}^t(S^{-1}) \cdot ({}^tAA)\, S^{-1} = ({}^tS)^{-1} \cdot S^2 \cdot S^{-1} \\ \qquad = ({}^tS)^{-1}\, {}^tS \cdot {}^tS \cdot S^{-1} \quad {}^tS = S \\ \qquad = I_n \Rightarrow \Omega \text{ orthogonale.} \end{cases}$$ ☒

Application :

$O_n(\mathbb{R})$ (matrices orthogonales) est compact ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :

* On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle $\|\cdot\|$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.
  Or une transformat° orthogonale conserve la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = 1$.
  $\Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.
* $\phi : A \longmapsto {}^tAA$, alors $O_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\{I_n\})$ est donc l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$, donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé (ϕ est continue).
* $O_n(\mathbb{R})$ est donc un fermé borné de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ en dimension finie, donc $O_n(\mathbb{R})$ est compact. ■

Thm : Généralisation du thm de décomposition polaire :

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme $A = \Omega S$ avec Ω orthogonale et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Rmq : On perd l'unicité, et S peut être dégénérée.

Preuve :

- $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = \lim\limits_{k \to +\infty} A_k$ avec $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (GL_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$.
- Par le thm de décomposition polaire :
  $\forall k \in \mathbb{N}$ $A_k = \Omega_k S_k$ avec
  → $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de matrices orthogonales
  → $(S_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$.

- $O_n(\mathbb{R})$ est un compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc de la suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une ss-suite $(\Omega_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ tq $\Omega_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

- $\left.\begin{array}{l} S_k = \Omega_k^{-1} A_k = {}^t\Omega_k A_k \\ \text{Continuité du pdt matriciel} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

D'où finalement $A = \Omega S$. ■

Thm : Décomposition de Dunford (multiplicative)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tq son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A se décompose de manière unique sous la forme $A = DU = UD$ avec :

- D est inversible et diagonalisable.
- U est unipotente (ie $I_n - U$ est nilpotente).

Définition : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M(X) = \det(X \cdot I_n - M)$$

Preuve :

* On a la décomposition de Dunford (additive) :

$$A = D + N$$

avec :

- D diagonalisable
- N nilpotente qui commute avec D.

A inversible $\Rightarrow D$ inversible $\Rightarrow A = D \cdot \underbrace{(I_n + D^{-1}N)}_{U}$

- D est diagonalisable inversible
- $U = I_n + D^{-1}N$ unipotente car :

$$(U - I_n)^k = (D^{-1}N)^k = (D^{-1})^k \underbrace{N^k}_{\text{nilpotente}} \quad \text{car } DN = ND \Leftrightarrow D^{-1}N = ND^{-1}$$

et U commute avec D.

* Si $A = DU$ est une telle décomposition, alors $A = D + N$ avec $N = D(U - I_n)$ nilpotente et commute à D, ce qui donne la décomposition additive de Dunford et donc l'unicité de D et de $U = D^{-1}A$. ☐

Application :

L'exponentielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Preuve : J'ai l'impression que c'est plutôt avec la version additive de la décomposition...