201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.

Définition: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1 s'il existe I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \longrightarrow I$ tq $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

Rmq: il faut que I soit stable par f.

Exemples :

* suites arithmétiques :
$\exists a \in \mathbb{K}$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a$
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + na$

* suites géométriques :
$\exists q \in \mathbb{K}^*$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \cdot u_n$
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n \cdot u_0$

* suites arithmético-géométriques :
$\exists (a,q) \in \mathbb{K}, \mathbb{K}^*$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \cdot u_n + a$

Étudier une suite arithmético-géométrique : $(a \neq 0,\ q \neq 1)$

Soit ℓ la solution de l'équation
$$q \cdot \ell + a = \ell \quad (\text{ie } \ell = \frac{a}{1-q})$$
On définit la suite auxiliaire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = u_n - \ell$$
Cette suite est géométrique. En effet :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= q \cdot u_n + a - \ell \\ &= q \cdot u_n + a - (q \cdot \ell + a) \\ &= q(u_n - \ell) + a - a \\ &= q \cdot v_n \end{aligned}$$
Donc $v_n = q^n \cdot v_0$ avec $v_0 = u_0 - \ell$

D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = v_n + \ell$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\quad \boxed{u_n = q^n \cdot \left(u_0 - \frac{a}{1-q}\right) + \frac{a}{1-q}}$$
$\blacksquare$

* suites homographiques :
$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ avec $ad - bc \neq 0$ (sinon le rapport est constant)
tq $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{a \cdot u_n + b}{c \cdot u_n + d}$.

Cette suite n'est définie que si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -\frac{d}{c}$ (sinon le dénominateur est nul).

+MethoDix p. 75

Étudier une suite homographique : (voir gourdon analyse)

On recherche un point fixe, ie on cherche l tq :
$$l = \frac{al+b}{c\cdot l+d}$$

$$\Leftrightarrow \quad l\cdot(cl+d) = al+b$$
$$\Leftrightarrow \quad cl^2 + (d-a)l - b = 0 \qquad (E).$$

① Si (E) a 2 racines distinctes α et β, alors :

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} \quad \text{avec :}$$

$$u_{n+1}-\alpha = \frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$$
$$= \frac{\cancel{ac\alpha u_n} + ad\,u_n + bc\alpha + \cancel{bd} - \cancel{ac\alpha u_n} - bc u_n - ad\alpha - \cancel{bd}}{(cu_n+d)(c\alpha+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(u_n-\alpha)}{(cu_n+d)(c\alpha+d)}$$

De même : $u_{n+1}-\beta = \dfrac{(ad-bc)(u_n-\beta)}{(cu_n+d)(c\beta+d)}$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \times \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k \times v_n$$

Avec $k = \dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d} = \dfrac{a-\alpha c}{a-\beta c}$

se montre "facilement".

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$: $v_n = q^n v_0$

$$\Rightarrow (u_n-\beta)v_n = u_n - \alpha \Rightarrow u_n v_n - \beta v_n = u_n - \alpha$$
$$\Rightarrow (v_n - 1)u_n = \beta v_n - \alpha$$

$$\Rightarrow \forall n \in\mathbb{N} : \boxed{u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1} \quad \text{avec} \quad v_n = q^n \cdot \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}}$$

② Si (E) a une racine double α $= \frac{a-d}{2c}$, alors on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

On trouve alors $v_{n+1} = \frac{2c}{a+d} + \frac{1}{u_n - \alpha}$

D'où $\quad v_{n+1} = k + v_n \quad$ avec $k = \frac{2c}{a+d}$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = kn + v_0 \quad$ avec $v_0 = \frac{1}{u_0 - \alpha}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n(u_n - \alpha) = 1$$

$$v_n u_n - v_n \alpha = 1$$

$$u_n = \frac{1 + \alpha v_n}{v_n}$$

Soit $\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{u_n = \frac{1+\alpha v_n}{v_n} \quad \text{avec} \quad v_n = kn + \frac{1}{u_0 - \alpha}}$ ☒

Exercice : Comment s'habiller pour l'apocalypse ?
- -> S'il fait beau un jour, la proba qu'il fasse beau le lendemain est $p_1 \in]0;1[$
- -> S'il fait mauvais un jour, la proba qu'il fasse mauvais le lendemain est $p_2 \in]0,1[$

Mq la proba qu'il fasse beau à la fin des temps ne dépend pas du temps qu'il fait aujourd'hui :

On note $u_n := \mathbb{P}(\underbrace{\text{"il fait beau dans } n \text{ jours"}}_{B_n})$

On a donc :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} | \overline{B_n}) \times \mathbb{P}(\overline{B_n})$$
$$= p_1 \times u_n + (1-p_2) \times (1-u_n)$$
$$= (p_1 + p_2 - 1) u_n + 1 - p_2$$

C'est une suite arithmético-géométrique.

On prend alors ℓ la solution de

$$\ell = (p_1 + p_2 - 1)\ell + 1 - p_2$$
$$\Leftrightarrow \quad p_2 - 1 = (p_1 + p_2 - 2)\ell$$
$$\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{p_2 - 1}{p_1 + p_2 - 2}$$

On pose ensuite :
$$v_n = u_n - \ell$$
Cette suite est géométrique de raison $p_1 + p_2 - 1$

D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n = (p_1 + p_2 - 1)^n \times u_0 + \frac{p_2 - 1}{p_1 + p_2 - 2}$$

Or $0 < p_1 < 1$

$0 < p_2 < 1$

$\Rightarrow \quad -1 < p_1 + p_2 - 1 < 1 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (p_1 + p_2 - 1)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{p_2 - 1}{p_1 + p_2 - 2}$ ne dépend pas du temps qu'il fait aujourd'hui.

Propriété : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \to I$

(1) * f est croissante sur $I \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone

(2) * f est décroissante sur $I \Rightarrow (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposés.

(3) * $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \in I \\ f \text{ continue en } I \end{array}\right\} \Rightarrow f(\ell) = \ell$

Preuve :

(1) : $f \nearrow$ sur I

$\Rightarrow f(u_{n+1}) - f(u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

est de même signe que $u_{n+1} - u_n$ car f est croissante.

Donc la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant.

- $u_1 > u_0 \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- $u_1 < u_0 \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(2) : $f \searrow$ sur $I \Rightarrow f \circ f \nearrow \Rightarrow (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

De plus, $f \searrow$ donc $u_3 - u_1$ et $u_2 - u_0$ sont de signes opposés, donc les sens de variation de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont opposés.

(3) : Par caractérisation séquentielle de la limite on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Donc $f(\ell) = \ell$, ℓ est un pt fixe de f. $\boxtimes$

Attention : Si I n'est pas fermé, il peut arriver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers ℓ sans que ℓ ~~f~~ soit un point fixe de f. Par exemple :

$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)\end{cases}$

$x \longmapsto \frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ qui n'est pas un pt fixe de f.

(exo 11.4 DAN).

Déf : $f : E \to E$ est contractante si : $\exists k\in[0;1[$ tq : $\forall (x,y)\in E^2$, $d(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y)$

Thm du point fixe (DAN p. 146)

(E,d) un espace métrique complet

$f : E \longrightarrow E$ une application contractante.

Alors f admet un unique pt fixe et tte suite de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \in E \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)\end{cases}$$

converge vers ce point fixe.

Preuve :

1) Existence :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq : $\begin{cases} u_0\in E \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)\end{cases}$

Mq cette suite est de Cauchy :

- Par récurrence, comme f est contractante, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $d(u_{n+1}, u_n) \leq k^n\, d(u_1, u_0)$

D'où $\forall p, q\in\mathbb{N}$ tq $p > q$:

$$d(u_q, u_p) \leq \sum_{n=q}^{p} d(u_{n+1}, u_n) \leq \sum_{n=q}^{p} k^n \cdot d(u_1, u_0)$$

$$= d(u_1,u_0)\cdot k^q \cdot \frac{1-k^{p-q}}{1-k}$$

$$\leq d(u_1,u_0)\cdot k^q \cdot \frac{1}{1-k} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$

D'où le résultat recherché.

Or (E,d) est un espace métrique complet donc toute suite de Cauchy converge.
Donc $\exists \ell$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

Or f est contractante, donc lipschitzienne, donc continue, donc :
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$
Donc ℓ est un point fixe de f.

2) <u>Unicité</u> :
Soient x et y 2 pts fixes de f.
Alors $d(x,y) \leq k\cdot d(x,y)$
$\Rightarrow (1-k)d(x,y) \leq 0$
Or $1-k>0$ car $k<1$ donc $d(x,y)\leq 0$ soit $x=y$.

<u>Propriété</u>:
Soit f ayant un pt fixe dans $\mathring{I}$, noté ℓ, et dérivable en ℓ :
(1) * $|f'(\ell)|<1 \Rightarrow \ell$ est un <u>point fixe attractif</u> et $\exists V$ un voisinage de ℓ tq $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} u_0\in V \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ est définie et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
(2) * $|f'(\ell)|>1 \Rightarrow \ell$ est un <u>point fixe répulsif</u> et tte suite de la forme $\begin{cases} u_0\in F \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ qui converge vers ℓ est stationnaire.

<u>Preuve</u> :
(1) Soit $\ell\in\mathring{I}$ tq $f(\ell)=\ell$ et $|f'(\ell)|<1$.
$|f'(\ell)| = \lim\limits_{t\to\ell}\left|\frac{f(t)-\ell}{t-\ell}\right|$

Soit $r\in]\,|f'(\ell)|;1[$, $\exists V \underset{=]\ell-\alpha;\ell+\alpha[}{}$ un voisinage de $\ell\subset I$ tq :
$\forall t\in V\setminus\{\ell\}$, $\left|\frac{f(t)-\ell}{t-\ell}\right|\leq r$

V est stable par f car $\forall t\in V=]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$, $0\leq|f(t)-\ell|\leq r|t-\ell|< r\alpha < \alpha$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-f(\ell)|\leq r\,|u_n-\ell|$
D'où par réc. : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\ell|\leq r^n|u_0-\ell| \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

(2) Soit $\ell \in \mathring{I}$ tq $f(\ell)=\ell$ et $|f'(\ell)|>1$.

Tout idem à (1) mais avec un changement de sens des inégalités et donc finalement :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \alpha$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \geq r\,|u_n - \ell|$

et par récurrence :

$\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \geq r^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|$

$r>1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV seulement si $|u_{n_0} - \ell| = 0$

soit $\forall n \geq n_0$, $u_n = \ell$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

☒

Application : Méthode de Newton → Dév ⇒ recasages : {201, 208, 251, 401, 403, 443.

$a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Lorsque c'est possible, on définit :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tq } \begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

(1) * Soit $\alpha \in]a,b[$ tq $\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ f'(\alpha) \neq 0. \end{cases}$

Alors $\exists F$ un voisinage de α tq $\forall x_0 \in F$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

(2) * Supposons $f(a)\cdot f(b) < 0$ et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x)\cdot f''(x) \neq 0$.

(a) → $\forall x_0 \in [a,b[$ tq $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, monotone et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

(b) → Majoration de l'erreur d'approximation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leq (b-a)\left[(b-a)\cdot\frac{M_2}{2m_1}\right]^{2^n-1}$$

avec $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Preuve : Sous réserve qu'elle soit définie, on pose $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

(*) D'où α est solution de $f(x)=0$ ssi α est un pt fixe de φ.

(1) $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ donc f' est continue sur I et comme $f'(\alpha) \neq 0$, $\exists V$ un voisinage de α sur lequel f' ne s'annule pas.

φ contractante et Thm du pt fixe !

$\Rightarrow \varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et dérivable sur V et :

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(\alpha) = \frac{\overbrace{f(\alpha)}^{0} f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0$$

De plus, $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^0(V, \mathbb{R}) \Rightarrow \exists F \subset V$ un voisinage de α sur lequel $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in F$.

D'après le thm des accroissements finis, φ est donc contractante sur F donc :
- $\varphi(F) \subset F \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie
- Par le thm du pt fixe : φ admet un unique pt fixe et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers ce point fixe. Par unicité, il s'agit de α.

(2) a. Supposons sans perte de généralité que :
$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases} \quad \forall x \in I = [a,b] \quad (\text{car } f'(x)f''(x) \neq 0)$$

En effet, si $f' < 0$ et $f'' < 0$ on remplace f par $-f$, si $f' > 0$ et $f'' < 0$ on remplace $x \mapsto f(x)$ par $x \mapsto -f(-x)$, et si $f' < 0$ et $f' > 0$ on remplace f par $x \mapsto f(-x)$.

① Mq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie :
- $f' > 0 \ \forall x \in [a,b]$ donc on peut définir φ (voir début preuve).
- $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ donc d'après la formule de Taylor-Lagrange* :

* à l'ordre 1

$\exists \theta_x$ compris strictement entre x et α tq :
$$f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x) f'(x) + \frac{(\alpha-x)^2}{2} f''(\theta_x)$$

$$\Rightarrow x - \alpha - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(\alpha-x)^2}{2} \cdot \frac{f''(\theta_x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) - \alpha = (x-\alpha)^2 \cdot \frac{f''(\theta_x)}{2f'(x)} \quad (*_1)$$

- $(*_1)$ est vrai $\forall x \in [a,b]$ et
  - $f' > 0$ sur $[a,b]$, $f'' > 0$ sur $[a,b]$ $\Big\} \Rightarrow \varphi(x) \geq \alpha \ \forall x \in [a,b]$ et
  - f est croissante (car $f' > 0$)

$$\Rightarrow \quad x \in [\alpha, b] \Leftrightarrow f(x) \geq \underbrace{f(\alpha)}_{=0} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad (*_2)$$

Soit $x \in [\alpha, b]$:

$$x - \underbrace{\frac{f(x)}{f'(x)}}_{\geq 0} \leq x \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \leq x$$

D'où : $\alpha \leq \varphi(x) \leq x \leq b$ $\quad (*_3)$

$\Rightarrow$ $[\alpha, b]$ est stable par φ. (a)

Par hypothèse : $\left.\begin{array}{l} f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \\ f'' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) > 0$.

$(*_2) \Rightarrow$ $x_0 \in [\alpha, b]$. (b)

(a) + (b) $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

② Mq l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solut° $\alpha \in]a,b[$:

$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \text{continue} \\ f' > 0 \Rightarrow f \text{ est strict. } \nearrow \\ f(a) f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ par le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$

③ Mq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et cv vers α :

$(*_3) \Rightarrow \alpha \leq \varphi(x_n) \leq x_n \leq b \Rightarrow \alpha \leq x_{n+1} \leq x_n \leq b$.

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\searrow$ et minorée par α dc elle cv vers un pt fixe de φ (car φ est continue).

Or α est l'unique solut° de $f(x) = 0$ donc d'après $(*)$, α est l'unique pt fixe de φ.

Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

(2) b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : \quad |x_n - \alpha| \leq (b-a) \cdot \left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right)^{2^n - 1}$$

* Initialisat° : $x_0, \alpha \in [a,b] \Rightarrow |x_0 - \alpha| \leq b - a$

donc $P(0)$ est vérifiée.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ soit vraie.

$$(*_1) \Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| = |x_n - \alpha|^2 \cdot \left|\frac{f''(\theta_x)}{2 f'(x_n)}\right|$$

$$\overset{P(n)}{\leq} \left[(b-a)\left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right)^{2^n - 1}\right]^2 \times \frac{M_2}{2 m_1}$$

$$\leq (b-a)^2 \cdot \frac{M_2}{2m_1} \cdot \left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right)^{2^{n+1}-2}$$

$$\leq (b-a)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{\frac{M_2}{2m_1}} \times \cancel{\frac{2}{b-a}} \cdot \cancel{\frac{m_1}{M_2}} \left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right)^{2^{n+1}-1}$$

$$\leq (b-a) \cdot \left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right)^{2^{n+1}-1}$$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Donc $\underline{\underline{P(n) \text{ est vraie } \forall n \in \mathbb{N}}}$.

$\boxtimes$

Rmq: C'est une vitesse de CV quadratique.

Rmq: Méthode très efficace si le pt de départ est proche de α.

Définition: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre $k \in \mathbb{N}$ s'il existe $f: \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}$ tq :

$$\begin{cases} u_0, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{K}^k \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = f(u_n, \dots, u_{n+k-1}) \end{cases}$$

Propriété:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ f \text{ est continue au pt } (\ell, \dots, \ell) \end{cases} \Rightarrow \ell = f(\ell, \dots, \ell)$$

Preuve:

$u_n, \dots, u_{n+k-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

donc par caractérisation séquentielle de la limite :

$f(u_n, \dots, n+k-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell, \dots, \ell)$.

Or $f(u_n, \dots, n+k-1) = u_{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Donc par continuité de f : $f(\ell, \dots, \ell) = \ell$.

$\boxtimes$

Si f est linéaire alors $\exists (a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{K}^k$ tq

$f : (x_0, \dots, x_{k-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{k-1} a_i x_i$

Et alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i}$$

Thm: Dans ce cas, l'équation :
$$X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_0 = 0$$
s'appelle équation caractéristique de la suite.
On note $\begin{cases} r_1, \dots, r_q \text{ ses racines} \\ m_1, \dots, m_q \text{ leur multiplicité.} \end{cases}$
Alors l'ensemble des suites vérifiant la récurrence est l'ensemble des suites de la forme :
$$u_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_q(n) r_q^n$$
où $\forall i \in [\![1;q]\!]$, $P_i \in \mathbb{K}_{m_i - 1}[X]$.

Preuve: (Voir Gourdon Pb 5 p. 285) X.

Exemple: Fibonacci :
$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$
Équation caractéristique : $x^2 - x - 1 = 0$
$$\Delta = 5 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m_1 = m_2 = 1 \end{cases}$$
D'après le thm ci-dessus :
$P_1, P_2 \in \mathbb{R}_0[X]$ ie $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tq :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ d'où :
- $0 = u_0 = \alpha_1 + \alpha_2$
- $1 = u_1 = \alpha_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow 2 = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{0} + \sqrt{5}(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Soit $\begin{cases} 2\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha_2 = -\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Exercice : Gourdon (n°3 p. 204)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0>0 \\ u_1>0 \\ \lambda>0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\lambda\cdot\sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$$

Trouver une expression explicite :

* Par récurrence immédiate, $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$.
  $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

* C'est une suite récurrente d'ordre 2, mais non linéaire. L'idée est de s'y ramener.

① On pose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall n\in\mathbb{N}$ par : $v_n=\ln(u_n)$ d'où :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+2}=\frac{v_{n+1}}{2}+\frac{v_n}{2}+\ln(\lambda)\quad (*)$$

Pour avoir la linéarité, il faut la rendre homogène, en cherchant une solution particulière w_n :

→ $w_n=\alpha$ constante : $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}+\ln(\lambda)=\alpha+\ln(\lambda)\neq\alpha$, impossible.

→ On cherche alors une solution de la forme : $w_n=\alpha n$:

(w_n) vérifie $(*)$ ssi $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\alpha(n+2)=\alpha\cdot\frac{(n+1)}{2}+\alpha\cdot\frac{n}{2}+\ln(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(n+2)=\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)+\ln(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left(\cancel{n}+2-\cancel{n}-\frac{1}{2}\right)=\ln(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha=\ln(\lambda)\Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{3}\ln(\lambda).$$

Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=\frac{2}{3}\ln(\lambda)\cdot n$ vérifie $(*)$.

③ Posons alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n=v_n-w_n$, on a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+2}=\frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n.$$

d'équation caractéristique :

$$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$$

$$\Delta=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow \begin{cases} r_1=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{2} \text{ et } r_2=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}=1 \\ m_1=m_2=1 \end{cases}$$

Les solutions sont donc de la forme :

$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = a \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n + b \cdot 1^n$

$x_n = \frac{a}{(-2)^n} + b.$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = x_n + w_n = \frac{a}{(-2)^n} + b + \frac{2}{3}\ln(\lambda) \cdot n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = e^{v_n} = A^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \times B \times \lambda^{2n/3}$ avec $\begin{cases} A = e^a \\ B = e^b \end{cases}$

③ Finalement :

$u_0 = AB \quad$ et $\quad u_1 = A^{-1/2} \cdot B \cdot \lambda^{2/3}$

$\Rightarrow \frac{u_0}{u_1} = A^{3/2} \cdot \lambda^{-2/3} \Rightarrow A^{3/2} = \lambda^{2/3} \cdot u_0 \cdot u_1^{-1}$

$\Rightarrow \underline{A = \lambda^{4/9} \cdot u_0^{2/3} \cdot u_1^{-2/3}}$

$\Rightarrow \underline{B} = u_0 \cdot A^{-1} = \underline{\lambda^{-4/9} u_0^{1/3} u_1^{2/3}}$

Soit finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{u_n = u_0^{1/3} u_1^{2/3} \lambda^{-4/9} \times \left(\frac{u_0 \cdot \lambda^{2/3}}{u_1}\right)^{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n} \times \lambda^{\frac{2n}{3}}}.$$

$\blacksquare$

<u>Autres exemples :</u>

* $u_{n+1} = f_n(u_n)$ comme $u_{n+1} = n!$

* Intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$
n'est pas donnée par une formule de récurrence, mais vérifie $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.