18/01 C. Gilles

Géométrie affine
Géométrie euclidienne

Déf : Un espace affine $(E, \vec{E})$ est **euclidien** si $\vec{E}$ est un espace vectoriel euclidien.

1 Espaces vectoriels euclidiens.

Déf : Un espace vectoriel E est dit **euclidien** s'il est réel, de dimension finie, et muni d'un produit scalaire. = forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot , \cdot \rangle$

On fixe un e.v. euclidien E.

Rappel : À tout $f \in \mathcal{L}(E)$ on associe son adjoint $f^* \in \mathcal{L}(E)$: $\forall x, y \in E, \ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

Déf : Groupe orthogonal :

$$O(E) = \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid f^* \circ f = id_E \} \text{ ss-gpe de } GL(E)$$

$$= \{ f \in GL(E) \mid f^{-1} = f^* \}$$

$$= \{ f \in (G)\mathcal{L}(E) \mid \forall (x,y) \in E^2, \ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \}$$

$$= \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E, \ \|f(x)\| = \|x\| \}$$

$$= \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \underset{\exists}{\forall} \text{ BON } \mathcal{B} \text{ de } E, \ \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) \in O_n(\mathbb{R}) \}$$

avec $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$

Les éléments de $O(E)$ st appelés $\begin{cases} \text{endomorphismes orthogonaux.} \\ \text{isométries vectorielles.} \end{cases}$

$$SO(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = 1\} = O(E) \cap SL(E)$$

Rappel : $f \in O(E) \Rightarrow \begin{cases} \det(f) = \pm 1. \\ Sp(f) \subset \{+1 ; -1\} \end{cases}$

Réduction des endomorphismes orthogonaux

Thm : Soit $f \in O(E)$.
Als $\exists$ une BON $\mathcal{B}$ de E tq $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{R_{\theta_\ell}} \end{pmatrix}$$

Où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\qquad \theta \neq 0 \ [\pi]$

Orientation d'un e.v. de dim. finie E

Déf: On dit que 2 bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E définissent la <u>même orientation</u> si $\underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'}_{=\det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})} > 0$

ex : $\dim E = 2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ $\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \det(P) = -1$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ n'ont pas la m̂ orientation.

C'est une relation d'équivalence sur les bases de E avec 2 classes d'équivalence.

Orienter E, c'est choisir une de ces classes comme référence. Les bases de cette classe sont dites directes, les autre indirectes.

Isométries vectorielles en dimension 2 :

Thm : Soit E un plan vectoriel euclidien

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.

1) Si $\det(f) = +1$ ($f \in SO(E)$).

Alors f est une rotation (y compris l'identité)

Plus précisément, fixons une orientation de E. Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\forall$ BOND $\mathcal{B}$ de E :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rmq : $\forall$ BONI $\mathcal{B}'$ on a alors :

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}') = R_{-\theta}$$

θ = mesure de l'angle de la rotation, bien défini modulo 2π.

$\overline{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

↳ angle de la rotation

2) Si $\det(f) = -1$ $(f \in O(E) \setminus SO(E))$.

f indirecte

Alors $\exists \mathcal{B}$ BON de E tq $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f est la réflexion orthogonale (vectorielle) par rapport à $\mathrm{Ker}(f - id_E) = E_1$ (de direction $\mathrm{Ker}(f + id_E) = E_{-1}$)

Rappel : $E = E_1 \oplus (E_1)^{\perp}$

$= E_1 \oplus E_{-1}$

Déf : Soit E un e.v. euclidien, F un sev de E.
Alors la <u>symétrie orthogonale</u> s_F par rapport à F est la symétrie vectorielle par rapport à F de direction $F^\perp$

(Bien défini car $E = F \oplus F^\perp$).

Si $\dim F = \dim E - 1$ (F hyperplan de E) on dit que s_F est une <u>réflexion</u> (vectorielle)

Classification des isométries vectorielles en dimension 2

$\det(f)$	$\dim(\operatorname{Ker}(f - id_E))$	Nature
$+1$	2	id_E
-1	1	réflexions
$+1$	0	rotations $\neq id_E$

<u>Rmq</u> : Si $f \in O(E)$, $\det(f) = (-1)^{\dim(\operatorname{Ker}(f + id))}$

<u>Isométries vectorielles en dimension 3 :</u>

<u>Thm :</u> $\dim E = 3$.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors $\exists\, \mathcal{B}$ une BON de E tq $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{|c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & \multicolumn{2}{|c}{} \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}.$$

Classification des isométries vectorielles en dimension 3

$\det(f)$	$\dim(\ker(f-id))$	Nature	Matrice ds une BON bien choisie
$+1$	3	id_E	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
-1	2	réflexion (= sym. orth. par rapport à un pl)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$+1$	1	rotation (de l'espace) $\neq id_E$	$\left(\begin{array}{c\|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & R_\theta \end{array}\right)$ $\theta \neq 0\ [2\pi]$
-1	0	anti-rotation ou symétrie-rotat° ou ;PFU	$\left(\begin{array}{c\|c} -1 & 0 \quad 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & R_\theta \end{array}\right)$ $\theta \neq 0\ [2\pi]$

iPFU = isométrie à pt fixe unique

CP : $\theta = \pi [2\pi]$
$\Rightarrow f = -id_E$

Description des rotations (vectorielles) :

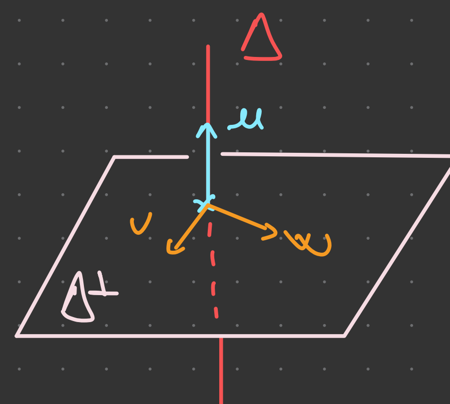
On oriente E.

$\theta \in \mathbb{R}$
$\theta \neq 0 [2\pi]$

Soit Δ une droite de E.

On oriente Δ par le choix d'un vecteur directeur u $(\|u\| = 1)$ de Δ : $\Delta = \mathrm{Vect}(u)$.

On a $E = \Delta \oplus \Delta^\perp$



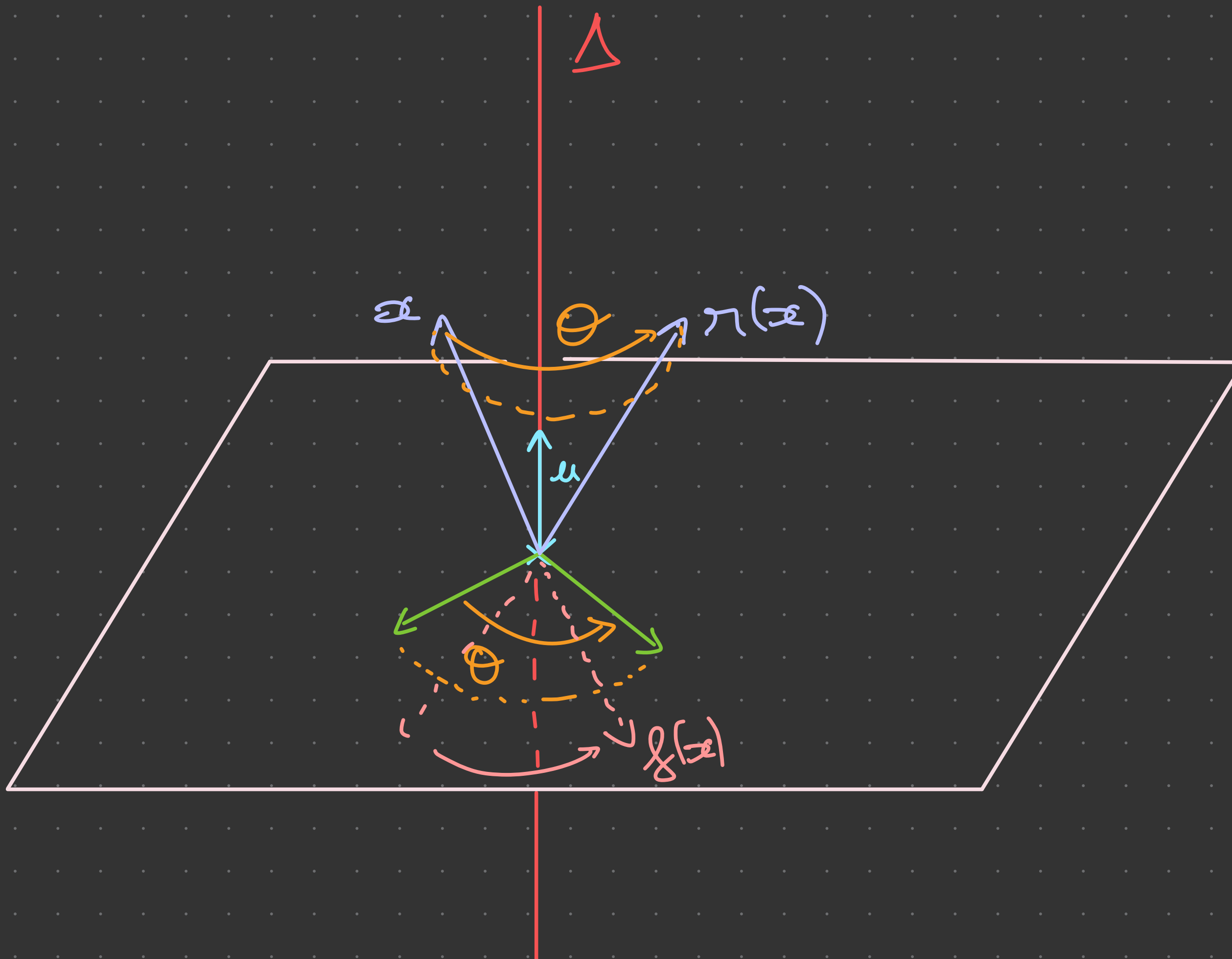
L'orientation de Δ et de E induisent une orientation de $\Delta^\perp$:

Pour toute BON (v, w) de $\Delta^\perp$, on dira que (v, w) est <u>directe</u> si (u, v, w) l'est.

D'où :

Déf : Rotation d'axe orienté Δ et de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ $(r_{\Delta,\theta})$ est l'identité sur Δ et la rotation de mesure θ sur $\Delta^\perp$.

$$* \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$



Δ
x
θ
r(x)
u
θ
s(x)

Description des anti-rotations.

E orienté.

Soit $\left\{\begin{array}{l}\Delta \text{ une droite orientée de } E \\ \theta \in \mathbb{R}, \quad \theta \not\equiv 0 [2\pi].\end{array}\right.$

L'anti rotation d'axe Δ et de mesure θ est la composée (commutative) :

$$r_{\Delta,\theta} \circ s_{\Delta^\perp} = s_{\Delta^\perp} \circ r_{\Delta,\theta}$$

Cas particulier : si $\theta \equiv \pi [2\pi]$, alors $f = -\mathrm{id}_E$ (n'importe quel axe convient).

② Espaces affines euclidiens

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine euclidien.

Déf : Pour $(A,B) \in E^2$, on pose :

$d(A,B) = \|\vec{AB}\| \quad (= \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle^{1/2})$

Noté aussi AB

Appelé distance euclidienne entre A et B.

Lemme : d est une distance sur E.

Déf : Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine.

f est une isométrie affine si f conserve les distances.

ie : $\forall A, B \in E, \quad d\left(f(A), f(B)\right) = d(A,B)$

$\iff$ ———— $\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\iff$ ———— $\|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\iff \quad \forall u \in \vec{E}, \quad \|\vec{f}(u)\| = \|u\|$

$\iff \quad \vec{f} \in O(\vec{E})$

Notations :

$\mathrm{Isom}(E) = \{ f : E \to E \text{ isométrie affine} \}$

Rmq : $f \in \mathrm{Isom}(E) \Rightarrow \vec{f} \in O(\vec{E}) \Rightarrow \vec{f} \in GL(\vec{E}) \Rightarrow f$ bij.

Prop : $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est un ss-gpe de $GA(\mathcal{E})$.

$GA(\mathcal{E}) = \{ f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ affine et bijective} \}$

Preuve : $\phi : GA(\mathcal{E}) \longrightarrow GL(\vec{\mathcal{E}})$ morph. de gpes.

$f \longmapsto \vec{f}$

$$\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) = \phi^{-1}\left(O(\vec{\mathcal{E}}) \right).$$

$\boxtimes$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{ f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \mid \vec{f} \in SO(\mathcal{E}) \}$$

$\det(\vec{f}) = +1$

$$= \phi^{-1}\left(SO(\vec{\mathcal{E}}) \right).$$

ss-gpe des <u>déplacements</u> de $\mathcal{E}$.

$\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \setminus \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ ensemble des antidéplacements
($\det \vec{f} = -1$)

Exemples :

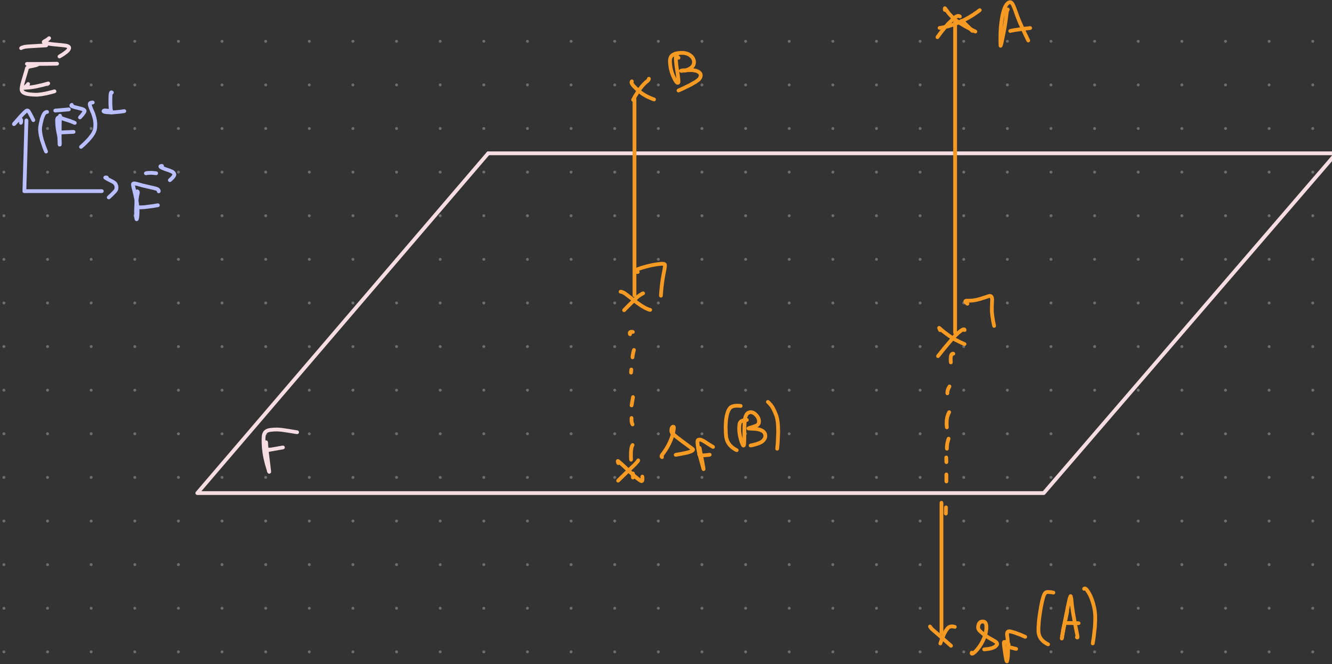
1) Les translations sont des déplacements.

2) Les symétries affines orthogonales :

Déf : Soit F un sea de $\mathcal{E}$.

La symétrie affine par rapport à F et de direction $(\vec{F})^\perp$ s'appelle la symétrie (affine) orthogonale par rapport à F. Notée s_F.

Si F est un hyperplan affine, s_F est par déf. une réflexion



<u>Thm</u>: Soit E un espace affine euclidien de dim. n

(version forte)

Soit $f : E \longrightarrow E$ une <u>application</u> (pas forcément affine !) qui conserve les distances.

Alors f se décompose en un produit (comp.) d'au plus $n+1$ réflexions.

__Corollaire :__

(version faible)

Toute <u>isométrie affine</u> se décompose en produit de réflexions.

<u>Démo</u> pas simple (peu faire un dév. mais ça bien bosser).

<u>Autrement dit</u> : $\mathrm{Isom}(E)$ est engendré par les réflexions.

Décomposition canonique des isométries affines.

Thm : Soit $f \in Isom(E)$.

Alors f admet une unique décomposition de la forme :

$$f = t_u \circ g$$

avec $\begin{cases} u \in \vec{E} \\ g \in Isom(E) \text{ admettant (au moins) un pt fixe} \\ g \text{ et } t_u \text{ commutent} \end{cases}$

De plus, $u \in Ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$

u vecteur propre pr la v.p. 1

ou est $\vec{0}$.

Commentaires :

1) Si f admet un pt fixe, elle est déjà décomposée $\left(f = t_{\vec{0}} \circ f = f \circ t_{\vec{0}}\right)$.

2) Si $1 \notin Sp(\vec{f})$, $u = \vec{0}$ et donc f admet un pt fixe.

3) $$\vec{f} = \overrightarrow{t_u \circ g} = \underbrace{\vec{t_u}}_{id_{\vec{E}}} \circ \vec{g} = \vec{g}.$$

Ce thm donne la classification des isométries affines en dim 2 et 3 à partir de la classification des isométries vectorielles.

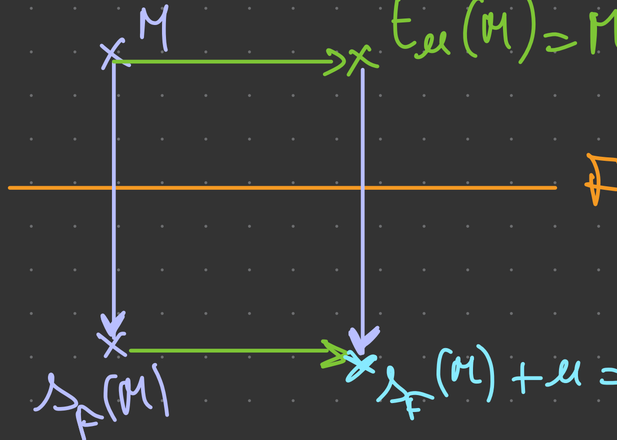
En dimension 2 :

$\vec{f}$	$\dim(\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_E))$	Avec pts fixes	Sans pts fixes déplacem^ts
$id_{\vec{E}}$	2	id_E E	Translations dépl. $\neq id_E$
réflexions vectorielles	1	réflexions affines par rapport à droite F F	(réflexion glissée) symétrie glissée anti-dépl.
rotations r_θ	0	rotations affine ($\neq id_E$) $rot(\Omega, \theta)$ Ω centre $\theta \neq 0[2\pi]$	dépl. $u = 0$

Rappel : Si $f : E \to E$ affine.
Alors l'ens. des pts fixes de f est :
- soit $\emptyset$
- soit un sea de direct° $\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$

forcém^t un ! pt fixe si 1 n'est pas valeur propre.

de $\vec{g}$.



$t_u(M) = M + u$

$\xrightarrow{u}$

$u \in \vec{F} = \ker(\vec{g} - id_{\vec{E}})$

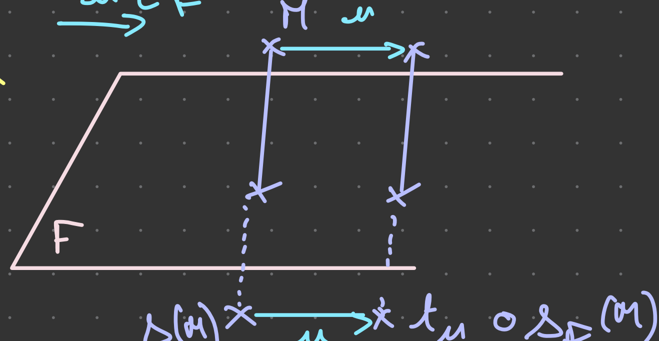
$s_F(M) + u = t_u \circ s_F(M) = s_F \circ t_u(M)$

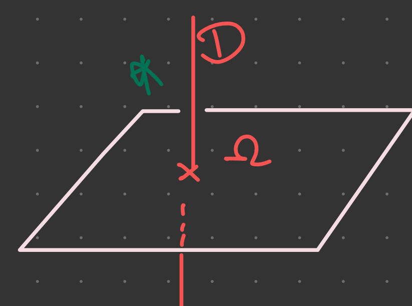
En dimension 3 :

$\vec{g}$	$\dim(\ker(\vec{g} - id_{\vec{E}}))$	Avec pts fixes	Sans pts fixes
$Id_{\vec{E}}$	3	Id_E	translations $\neq id_E$

réflexion	2	réflexion = symétrie / plan	réflexion glissée ✱
rotation	1	rotation : { axe angle	vissage $u \in \vec{D}$ $t_u \circ r_{D,\theta}$ ✱
symétrie-rotation	0	symétrie-rotation : { axe D plan orthogonal à D ✱ angle	×

✱





R $\begin{cases} \text{axe } D \text{ orienté par } v \\ \text{angle } \theta \\ u \in \vec{D} \end{cases}$

$r = rot(D, \theta)$