249 Loi normale en probabilités et statistiques.

1 Généralités sur la loi normale.

Introduite par Gauss en 1809 à propos d'un pb d'estimatio de paramètre.

Prop. & déf : $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{array}$$

est une densité de proba sur $\mathbb{R}$. On l'appelle loi normale de paramètres μ et σ^2 et on la note : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Preuve : $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ de manière immédiate.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{y = \frac{(x-\mu)}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-y^2/2} \sigma\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \cancel{\sigma}}} \cancel{\sigma} \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, dy}^{\text{intégrale de Gauss.}}$$

$$I = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \times \cancel{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Calcul de l'intégrale de Gauss:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

1. $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc localement intégrable.

$x^2 e^{-x^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ par croissances comparées donc

$e^{-x^2} = \underset{\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CV (Rieman avec $\alpha = 2 > 1$)

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ $\boxed{\text{CV}}$ également.

2. $A_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx \underset{t = \sqrt{n}\cos x}{=} \cancel{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}}^{0} \sin^{2n+1}\left(\arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) \times \frac{\cancel{-1}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{n}}} \times \frac{dt}{\cancel{\sqrt{n}}}$

$x = \arccos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ et $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{n}}} \times \frac{dt}{\sqrt{n}}$

Rmq : $\begin{cases} \forall x \in [-1;1], \ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \dfrac{d}{dx}\arccos(u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \times \dfrac{du}{dx} \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{2n+1}{2}} \times \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{-1/2} dt = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n} dt$$

On : $\forall t \in [0;\sqrt{n}[$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} \leq e^{\cancel{n} \times \frac{-t^2}{\cancel{n}}} = e^{-t^2}$$

car $\forall u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$ par concavité et exp est croissante.

Ainsi e^{-t^2} est un majorant intégrable de $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$, donc en appliquant le thm de cv dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

car $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \frac{-t^2}{n} = -t^2 \Rightarrow \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-t^2}$

On rappelle la <u>formule de Wallis</u> :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \, dx \underset{p \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$$

D'où :

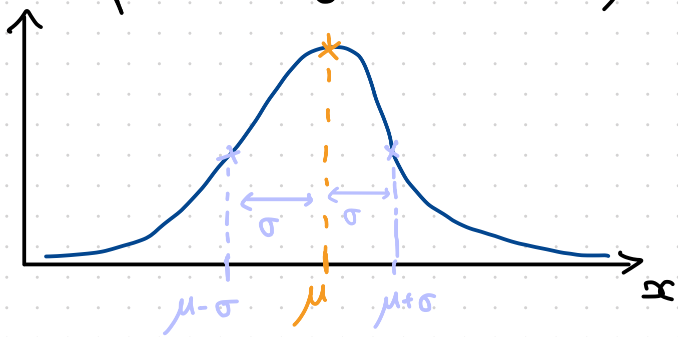
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) \, dx \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{4n+2}}$$

D'où $\displaystyle \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n\pi}{4n+2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Et donc par parité : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$.

Ptés : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

* (2) $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$
* Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on parle de loi normale centrée réduite.
* Le graphe de la densité de probas est une "courbe en cloche", symétrique par rapport à $x = \mu$, avec un max en μ, et 2 pts d'inflexion en $\mu \pm \sigma$:



* La fct° de répartition Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement $\nearrow$ et n'a pas d'expression explicite.

* (1) $Y = \mu + \sigma X$: $\qquad X \sim \mathcal{N}(0;1) \iff Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Preuve :

(1) **Lemme :** X de densité f_X (pas forcément une loi normale)

$Y = \mu + \sigma X$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ fixés.

Alors Y a pour densité f_Y définie ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot f_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Preuve : $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\mu + \sigma X \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$y = \mu + \sigma x \Leftrightarrow x = \frac{y-\mu}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma}\,dy = \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{t} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)dy$$

$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\,dy$$

En appliquant le lemme ci-dessus on a bien le résultat recherché.

(2) $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, donc $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

* $$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x \cdot e^{-x^2/2}\,dx$$

$y = -x$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x \cdot e^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x \cdot e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cancel{-}y)\, e^{-y^2/2} \cancel{-} dy + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x \cdot e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \cancel{-\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-y^2/2} dy} + \cancel{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \cdot e^{-x^2/2} dx}$$

$$= 0$$

- D'une manière générale : $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = \mu + \sigma X$ et :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mu + \sigma X] = \mu + \sigma \cdot \mathbb{E}[X] = \mu + \sigma \times 0 = \mu.$$

* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{(\mathbb{E}[X])^2}_{0} = \mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2} dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{(-x) \cdot e^{-x^2/2}}_{v'} dx$$

IPP

$u' = 1$; $v = e^{-x^2/2}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[x \cdot e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{=0} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{=1}$$

$= 1$

- D'une manière générale :

$Var(Y) = Var(\mu + \sigma X) = \sigma^2 \cdot Var(X) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2.$

<u>Ppté</u> : La somme de 2 gaussiennes est tjs une gaussienne.

En particulier :

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

<u>Preuve</u> : On note f_i la densité de X_i, $i \in \{1; 2\}$.

① <u>Cas particulier</u> : $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $\sigma_1 = 1$.

On pose $\sigma_2 = s > 0$.

On a donc $X_1 \sim \mathcal{N}(0;1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(0, s^2)$. $(X_1 \perp\!\!\!\perp X_2)$

On veut donc mq $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0; 1+s^2)$.

Or la densité d'une somme de 2 v.a.r. est prop. au <u>pdt de convolution</u> de leurs densités respectives, si ce dernier est continu par morceaux.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tq :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) \cdot f_2(y)\, dy$$

$$\Rightarrow h(x) = K \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2s^2}}\, dy$$

$$h(x) = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2x^2 - 2s^2xy + s^2y^2 + y^2}{2s^2}} \, dy$$

$$h(x) = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2(1+s^2) - 2s^2xy + s^2x^2}{2s^2}} \, dy$$

$$h(x) = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+s^2}{2s^2} \times \left[y^2 - 2\frac{s^2}{1+s^2}xy\right]} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dy$$

Or $-\frac{x^2}{2} = \underbrace{\frac{s^2}{1+s^2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}} - \frac{s^2}{1+s^2} \cdot \frac{x^2}{2}$

$$= \left(\frac{s^2}{1+s^2} - 1\right)\frac{x^2}{2} - \left(\frac{s^2}{1+s^2}x\right)^2 \cdot \frac{1+s^2}{2s^2}$$

$$= \frac{-1}{2(1+s^2)}x^2 - \frac{1+s^2}{2s^2}\left(\frac{s^2}{1+s^2}x\right)^2$$

D'où

$$h(x) = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+s^2}{2s^2}\left[y^2 - 2\frac{s^2}{1+s^2} + \left(\frac{s^2}{1+s^2}x\right)^2\right]} \times e^{-\frac{1}{2(1+s^2)}x^2} dy$$

$$h(x) = K \cdot e^{-\frac{1}{2(1+s^2)}x^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+s^2}{2s^2}\left(y - \frac{s^2}{1+s^2}x\right)^2} dy$$

$u = y - \frac{s^2}{1+s^2}x$

$$h(x) = K \cdot e^{-\frac{1}{2(1+s^2)}x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+s^2}{2s^2}u^2} du}_{= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{ avec } \alpha = \frac{1+s^2}{2s^2}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = C \times e^{-\frac{1}{2(1+s^2)}x^2} \quad \text{avec } C = K \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{ cste.}$$

On c'est une densité de proba ssi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = 1 \iff C \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1+s^2)}x^2}\,dx = 1$$

$$\iff C \times \sqrt{\pi \times 2(1+s^2)} = 1 \iff \boxed{C = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+s^2)}}}$$

Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2(1+s^2)}}}{\sqrt{2\pi(1+s^2)}}$ qui est la densité de proba d'une loi $\mathcal{N}(0; 1+s^2)$.

On a donc bien : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0; 1+s^2)$.

② <u>Cas général</u> : $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$

Alors on pose :

$$X_1 = \frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \Rightarrow X_1 \sim \mathcal{N}(0;1)$$

$$X_2 = \frac{Y-\mu_2}{\sigma_1} = \underbrace{\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}}_{\sim \mathcal{N}(0;1)} \times \underbrace{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}_{= s} \Rightarrow X_2 \sim \mathcal{N}(0;s^2)$$

On a alors d'après le cas 1 :

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0;1+s^2) = \mathcal{N}\left(0, 1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)$$

Or $X+Y = \sigma_1 X_1 + \mu_1 + \sigma_1 X_2 + \mu_2$

$$= \sigma_1(X_1+X_2) + \mu_1 + \mu_2$$

$$\Rightarrow X+Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1+\mu_2 ; \sigma_1^2 \times \left(1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2 \,;\, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

Ppté : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}_{f(t)} dt$, $\Phi(\mathbb{R}) =]0,1[$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Preuve : Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt \overset{f \text{ est paire}}{=} \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 - \Phi(x).$$

Ppté : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. $\forall \gamma \in [0;1[$, $\exists!\, z_\gamma \in]0;+\infty[$ tq $\mathbb{P}(|X| < z_\gamma) = \gamma$

En pratique : $z_{0,9} \approx 1,64$; $z_{0,95} \approx 1,96$; $z_{0,99} \approx 2,58$

<u>Preuve</u> : $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$\mathbb{P}(|X| < x) = 2 \cdot \mathbb{P}(X \in [0;x[) = 2 \times \int_0^x f(t)\,dt$$

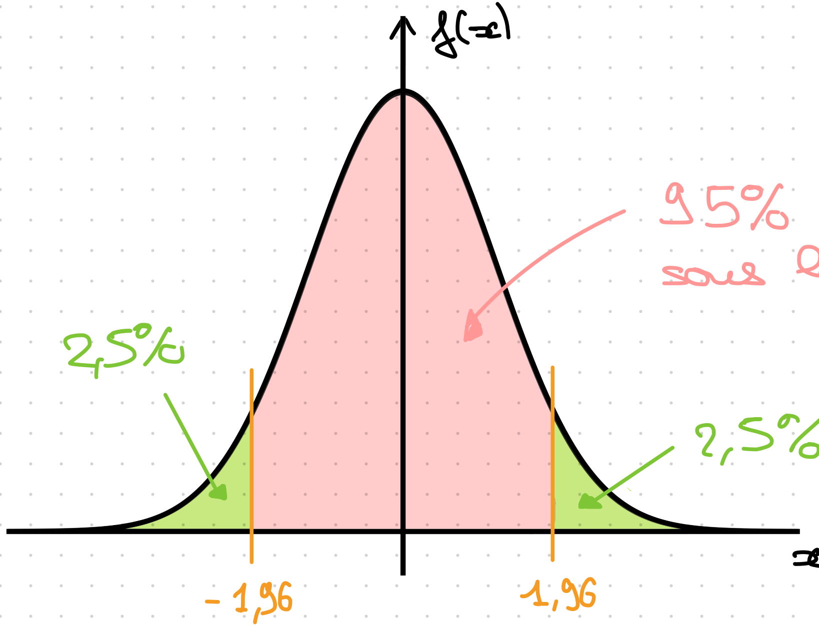
$$= 2 \times \Big[\Phi(x) - \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt}_{=\frac{1}{2} \text{ car } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \text{ et } f \text{ paire}} \Big] = 2 \cdot \Phi(x) - 1$$

Or Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ strictement croissante, donc $\forall y \in]0;1[$, $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ tq $\Phi(x) = y$.

Ainsi $\forall \gamma \in [0;1[$, $\exists!\, z_\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tq :

$$\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma+1}{2} \iff 2\cdot\Phi(z_\gamma) - 1 = \gamma \iff \mathbb{P}(|X| < z_\gamma) = \gamma.$$

Illustration : $z_{0,95} \simeq 1,96$:



Prop : **Méthode de Box-Muller** (DÉV) :

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathcal{U}(]0;1[) \\ Y \sim \mathcal{U}(]0;1[) \\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Si} : \begin{cases} S = \sqrt{-2\ln(X)} \cdot \cos(2\pi Y) \\ T = \sqrt{-2\ln(X)} \cdot \sin(2\pi Y) \end{cases}$$

$$\text{Alors} : \begin{cases} S \perp\!\!\!\perp T \\ S, T \sim \mathcal{N}(0;1) \end{cases}$$

Rmq : L'objectif est de simuler une v.a. suivant une loi de Gauss, ou plus généralem^T plusieurs v.a.r. gauss. $\perp\!\!\!\perp$., en supposant que l'on dispose d'un générateur aléatoire de loi uniforme.

Rmq : → + précis et rapide que la méthode de la transformée inverse.
→ − rapide que la méthode ziggourat (mais complexe et besoin de tables).
→ version plaire utilisée par la bibliothèque standard du C++ de GCC

<u>Preuve</u> : On pose :

$$\Phi : U =]0;1[^2 \longrightarrow V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \quad , \text{ U et V ouverts.}$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\sqrt{-2\ln x}\,\cos(2\pi y) ; \sqrt{-2\ln x}\,\sin(2\pi y)\right).$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un difféomorphisme :

<u>Déf</u> : $f : U \to V$, U et V ouverts est un <u>$\mathcal{C}^k$- difféomorphisme</u> si f est bijective et f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

($k=1$ => "difféomorphisme")

* On pose :

$$\rho(x) = \sqrt{-2\ln x}$$

$$\theta(y) = 2\pi y$$

=> $\Phi(x,y) = \left(\rho(x)\cos(\theta(y)) ; \rho(x)\cdot\sin(\theta(y))\right)$

=> $(\rho(x), \theta(y))$ sont les coordonnées polaires du point $\Phi(x,y)$.

=> Φ est bien une <u>bijection</u> de U ds V.

coordonnées polaires ?

* Φ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$.
* Reste à mq Φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$:

Calculons le déterminant jacobien de Φ

Déf : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
On écrit $f = (f_1, \dots, f_p)$.
Soit $a \in U$ où f est différentiable
Alors sa matrice jacobienne est :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$\forall (x, y) \in \,]0;1[^2$:

$$|J_\Phi(x,y)| = \begin{vmatrix} -\frac{\cos(2\pi y)}{x\sqrt{-2\ln x}} & -2\pi\sqrt{-2\ln x}\,\sin(2\pi y) \\ -\frac{\sin(2\pi y)}{x\sqrt{-2\ln x}} & 2\pi\sqrt{-2\ln x}\,\cos(2\pi y) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2\pi\cos^2(2\pi y)}{x} - \frac{2\pi\sin^2(2\pi y)}{x}$$

$$= \frac{-2\pi}{x}$$

On $J_\Phi(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in]0;1[^2$, on a d'après le <u>théorème d'inversion globale</u> que Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

<u>Thm d'inversion globale</u>:

U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$
et injective. Alors LASSE:
* $\forall x \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est inversible
* $f(U)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Ainsi, Φ est bien un <u>difféomorphisme</u>.

* De plus : $\forall (s,t) \in V \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\left| J_{\Phi^{-1}}(s,t) \right| = \frac{1}{|J_\Phi(x,y)|} = \frac{-x}{2\pi}$$

avec :

$$x = e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \left| J_{\Phi^{-1}}(s,t) \right| = -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}$$

D'après le <u>thm 15.3.5 (p.o.)</u> on a alors :

(S,T) a pour densité $g_{(S,T)} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (s,t) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} \mathbb{1}_V(s,t) \end{array}$

et même $g_{(S,T)}(s,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}$ car si on enlève $\mathbb{1}_V(s,t)$, on ne modifie la densité que sur $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, qui est de "surface nulle".

Or cette fct° est à variables séparables donc on a le résultat recherché.

Bon. C'était la démo de Thierry ça. J'espère que celle du Karmati sera plus simple !

<u>Preuve alternative</u> :

<u>Lemme</u>: $R \perp\!\!\!\perp \Theta$ tq : $\begin{cases} S = R^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Theta \sim \mathcal{U}([0;2\pi]) \end{cases}$ et $\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases}$

Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $Z = (X,Y) \sim \mathcal{N}(0,1)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

On veut la dens. du vecteur aléatoire (X,Y), ie on cherche $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq :

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy.$$

On pose $g : [0;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(s,\theta) \longmapsto (\sqrt{s}\cos\theta, \sqrt{s}\sin\theta)$

D'où $(X,Y) = g(S,\Theta)$

thm du transfert

$$\mathbb{E}[f(X,Y)] = \mathbb{E}[f\circ g(S,\Theta)] = \int_{\mathbb{R}^2} f\circ g(s,\theta) \cdot f_{S,\Theta}(s,\theta)\, ds\, d\theta$$

$$\overset{S \perp\!\!\!\perp \Theta}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f\circ g(s,\theta) \cdot f_S(s) \cdot f_\Theta\, ds\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{[0;2\pi]\times[0;+\infty[} f\circ g(s,\Theta) \times \frac{1}{2} e^{-\frac{s}{2}} \, ds \, d\Theta$$

car $\begin{cases} S \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f_S(s) = \dfrac{e^{-\frac{s}{2}}}{2} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(s) \\ \Theta \sim \mathcal{U}([0;2\pi]) \Rightarrow f_\Theta(\Theta) = \dfrac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0;2\pi]}(\Theta) \end{cases}$

* On effectue un changement de variable :

On pose $\begin{cases} U =]0;+\infty[\times]0;2\pi[\\ V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \end{cases}$ ouverts.

On pose aussi : $h = g_{|U} : U \longrightarrow V$

Mouais. J'ai l'impression que c'est blindé d'erreurs et je comprends pas tout.

Preuve par Statoscope:

$\Theta \sim \mathcal{U}([0;2\pi])$ et $R \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Theta \perp R$.

$X = \sqrt{R} \cdot \cos\Theta$ et $Y = \sqrt{R} \cdot \sin\Theta$.

Mq X et $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$ et $X \perp Y$.

$$f_{\Theta,R}(\theta,r) = f_\Theta(\theta) \times f_R(r) \quad \text{car } \Theta \perp R$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0;2\pi]}(\theta) \times \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(r)$$

On doit maintenant exprimer Θ et R en fct° de X et Y (inverser ce que l'on a).

$$\begin{cases} x = \sqrt{r}\cos\theta \\ y = \sqrt{r}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = ? \\ r = ? \end{cases}$$

$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $x \neq 0$ or X v.a.r. continue donc $\mathbb{P}(X=0)=0$.

$x^2+y^2 = r\,(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}) \Rightarrow r = x^2+y^2$.

Rmq : arctan est définie sur $\mathbb{R}$ mais bij. seulem^t entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

On définit donc :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times [0;2\pi] \\ (x,y) & \longmapsto & \left(x^2+y^2,\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \end{array}$$

On est en fait à une cste près.

On vérifie que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

nécessaire pr appliquer le thm de changem^t de var.

* Φ bijective ✓ (on sait que $\Phi^{-1}(r,\theta) = (\sqrt{r}\cos\theta, \sqrt{r}\sin\theta)$).
* Φ continue ✓
* Dérivées partielles existent et sont continues :

$$
J_\Phi(x,y) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 2x & 2y \\[1ex] \dfrac{-y/x^2}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} & \dfrac{1/x}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \Phi_1 \\[3ex] \longrightarrow \Phi_2 \end{array} \\
\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{array} &
\end{array}
$$

Rappel :

$$\frac{d\arctan(u(t))}{dt} = \frac{u'(t)}{1+u^2(t)}$$

$$u(x,y) = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ les dérivées existent et sont bien continues. ✓

* Φ^{-1} est $C1$ ✓; vérifié si $\det(J_\Phi) \neq 0$:

$$|J_\Phi(x,y)| = \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{2\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{2\cancel{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}}{\cancel{1+\frac{y^2}{x^2}}} = 2 \neq 0.$$

On peut donc bien appliquer le thm de changem^t de var :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{\Theta,R}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right), x^2+y^2\right) \times \left|\det\left(J_\Phi\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0;2\pi]}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \times \frac{1}{\cancel{2}} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x^2+y^2) \times \cancel{2}$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}(x,y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)}_{\{0\}\text{ est négligeable}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

C'est bien le pdt de 2 lois normales centrées et réduites.

Bcp + simple mais pas très rigoureux ?

Bon. Je vais devoir faire mon propre mix je pense...
↳ Je le ferai à part. Passons à la suite.

Convergence et intervalles (statistiques)

Thm de Moivre-Laplace :

$p \in]0;1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et on note :

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$ (version centrée réduite).

Alors $\tilde{S}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1)$, autrement dit :

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$:

$$\mathbb{P}(a \leq \tilde{S}_n \leq b) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx$$

Preuve : Voir celle par les gén. car. des détails de la leçon 229.
ou [MEY1] p. 125.

Règle empirique : $\left.\begin{array}{l} n \geqslant 30 \\ np \geqslant 5 \\ np(1-p) \geqslant 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Thm Central-Limite :

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ iid admettant un moment d'ordre 2.

On note $\begin{cases} m = \mathbb{E}[X_i] \\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) \end{cases}$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$.

On considère $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Alors :

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z$$

Autrement dit, $\forall I$ intervalle réel :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \in I\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(Z \in I)$$

Preuve : Admis.

Intervalles de confiance / fluctuation $\longrightarrow$ Voir détails 229.

Statistiques