249

Loi normale en probabilités et statistiques.

I La loi normale.

Popularisée par Gauss en 1809, mais introduite en 1780 par Laplace.

Prop & déf 1 : $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$

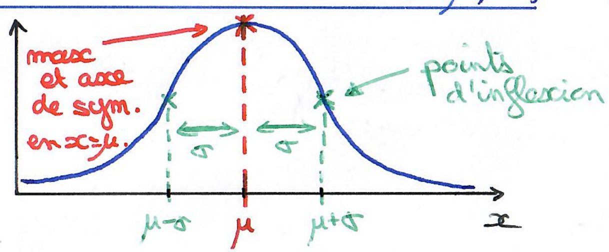
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \qquad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

est une densité de probabilités sur $\mathbb{R}$. On l'appelle loi normale de paramètres μ et σ^2 et on la note : $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Ppté 2 : $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

- $E[X] = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$.
- Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on parle de loi normale centrée et réduite.

Graphe 3 de la densité d'une $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$:



Ppté 4 : La fonction de répartition Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, est strictement croissante et n'a pas d'expression explicite.

Ppté 5 : Soit $Y = \mu + \sigma X$. Alors :

$X \sim \mathcal{N}(0;1) \iff Y \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Rmq : On pourra donc souvent se ramener à l'étude d'une normale centrée réduite.

Ppté 6 : La somme de 2 gaussiennes indépendantes est aussi une gaussienne. En particulier :

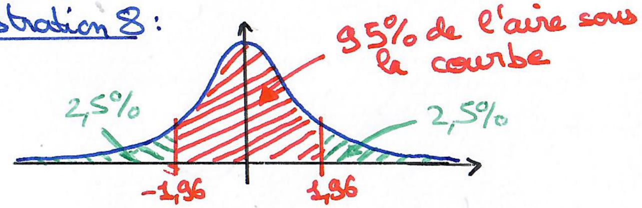
$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2) \\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2) \\ X \perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

Ppté 7 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. Alors :

$\forall \gamma \in [0;1[$, $\exists !\, z_\gamma \in]0;+\infty[$ tel que : $\mathbb{P}(|X| < z_\gamma) = \gamma$.

En pratique : $z_{0,95} \approx 1,95$.

Illustration 8 :



Ppté 9 : Méthode de Box-Muller (DÉV)

Soient X, Y iid de loi $\mathcal{U}(]0;1[)$.

Alors les v.a.r. :

$$\begin{cases} S = \sqrt{-2\ln(X)} \cdot \cos(2\pi Y) \\ T = \sqrt{-2\ln(X)} \cdot \sin(2\pi Y) \end{cases}$$

sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0;1)$.

II Convergence et application aux statistiques.

Thm 10 : Moivre-Laplace : $p \in]0;1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et on note : $\tilde{S}_n = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

Alors : $\tilde{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1)$, ie :

$\forall a < b$:

$$\mathbb{P}(a \leq \tilde{S}_n \leq b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

Application 11 : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$ et $\overline{X_n} = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors :

$$\forall \gamma \in [0;1[: \quad \mathbb{P}\left(\overline{X_n} \in \underbrace{\left[p \pm \frac{z_\gamma\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]}_{\text{Intervalle de fluctuation}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$$

Thm 11 : Central-limite :

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ iid admettant un moment d'ordre 2. On note $\begin{cases} m = E[X_i] \\ \sigma^2 = Var(X_i) \end{cases}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Alors :

$\dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z$ ie $\forall I$ int. réel :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \in I\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(Z \in I).$$

Application 12 : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0;1[$ inconnue. Alors $\forall \gamma \in [0;1[$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(p \in \underbrace{\left[\overline{X_n} \pm \frac{z_\gamma}{2\sqrt{n}}\right]}_{\text{Intervalle de confiance}}\right) \geq \gamma$$