

# DÉV : Approximation de $\pi$ par des méthodes de Monte-Carlo

## 1) Contexte

### ✳ Exercice 1 :

On pose :

$$f : \begin{array}{l} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 f(x)dx$$

- 1) Quel est le lien de cette intégrale avec  $\pi$  ?
- 2) Proposer un premier estimateur sans biais de  $I$  avec une méthode de Monte-Carlo « naïve ».
- 3) Proposer un second estimateur sans biais de  $I$  avec la méthode de Monte-Carlo standard pour l'intégration numérique.
- 4) Comparer ces deux estimateurs.
- 5) À l'aide d'un intervalle de confiance de niveau asymptotique 95 %, déterminer le nombre de lancers permettant d'obtenir une estimation de  $\pi$  avec une précision de  $10^{-2}$  pour le meilleur des 2 estimateurs.

### a. Recasages

- ☞ **229** : Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
- ☞ **231** : Espérance, variance; loi faible des grands nombres. Applications.
- ☞ **241** : Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications. (Les définitions des notions de convergence sont supposées connues).
- ☞ **254** : Algorithmes d'approximation du nombre  $\pi$ .
- ☞ **421** : Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Aspects algorithmiques.
- ☞ **432** : Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.
- ☞ **437** : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
- ☞ **448** : Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.

### b. Sources :

- ☞ [DUP] G. Dupont. (2020). *Probabilités et statistiques pour l'enseignement. CAPES/CAPLP, Agrégation interne Mathématiques* (2e édition). Dunod.
- ☞ [KAR] J. Karmati, S. Polteau. (2020). *51 leçons pour la première épreuve orale d'exposé. Agrégation interne/CAERPA Mathématiques*. Dunod.

### c. Quelques remarques préliminaires

[KAR] reprend en grande partie l'exercice de [DUP] mais en enlevant toutes les questions intermédiaires (et en ajoutant quelques éléments à la fin du développement). Je ne trouve pas très intuitif avec l'énoncé de [KAR] de proposer 2 estimateurs différents, mais d'un autre côté l'exercice initial me semble trop détaillé dans ses questions pour faire un bon développement. J'ai donc reformulé les questions pour guider le sens global de l'exercice, sans le rendre trivial pour autant.

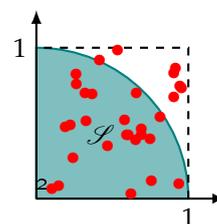
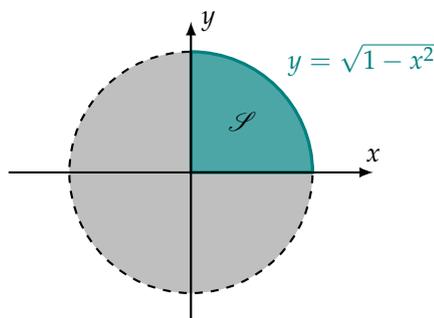
## 2) Développement

**1** La fonction  $f$  paramétrise de cercle de centre  $(0,0)$  et de rayon 1, et donc  $I$  est égale au quart de l'aire du disque unité :

$$I = \frac{\pi}{4}$$

On nomme  $\mathcal{S}$  la région du pavé  $[0;1]^2$  qui se trouve sous la courbe représentative de  $f$ .

**2** Idée : On tire aléatoirement des points dans  $[0;1]^2$ . La probabilité que l'un de ces points tombe dans  $\mathcal{S}$  est le quotient de l'aire sous la courbe par l'aire du pavé, soit  $I$ . Donc si on tire un grand nombre  $n$  de points dans le pavé et que l'on note  $f_n$  la fréquence de ceux qui tombent dans  $\mathcal{S}$ , la loi des grands nombres assure alors que  $I \approx f_n$ .



On définit les variables aléatoires réelles (v.a.r.) suivantes :

☞  $Y$  suit une loi uniforme sur  $[0;1]^2$ . On a donc  $\mathbb{P}(Y \in \mathcal{S}) = \frac{\mathcal{A}_{\mathcal{S}}}{\mathcal{A}_{[0;1]^2}} = \frac{I}{1} = I = \frac{\pi}{4}$ .

☞  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  la v.a.r.  $X_i$  vaut 1 si le  $i$ -ème lancer tombe dans  $\mathcal{S}$ , et 0 sinon, d'où  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(Y \in \mathcal{S}) = \frac{\pi}{4}$ .

☞  $(X_1, \dots, X_n)$  est donc un échantillon aléatoire de taille  $n$  de loi  $\mathcal{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

☞  $S_n$  le nombre de points qui tombent dans  $\mathcal{S}$ . On a alors  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\pi}{4}\right)$ .

On a  $\mathbb{E}[S_n] = \frac{n\pi}{4}$ , on considère donc  $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ , qui correspond à la fréquence de points qui tombent dans  $\mathcal{S}$ .

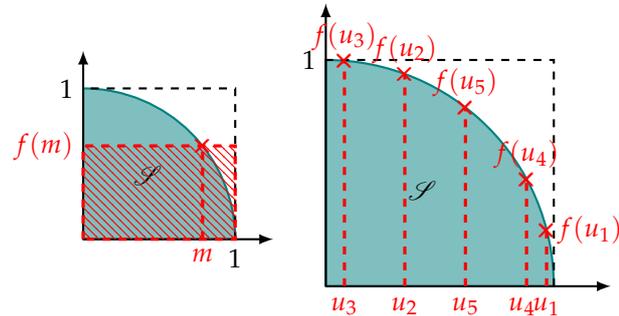
$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{\pi}{4}$ , donc  $\bar{X}_n$  est un estimateur sans biais de  $I$ .

Puisque  $\bar{X}_n$  est un estimateur sans biais, son risque quadratique moyen (RQM) est donné par la variance :

$$r_I(\bar{X}_n) = \text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = \frac{nI(1-I)}{n^2} \quad \text{soit} \quad r_I(\bar{X}_n) = \frac{I(1-I)}{n}$$

**3** Idée : Le théorème de la moyenne nous dit que si  $\mathcal{I} = \int_a^b g(t) dt$  avec  $g$  continue par morceaux, il existe  $m \in [a; b]$  tel que  $\mathcal{I} = (b-a)m$ .  $m$  est la valeur moyenne de  $g$  sur  $[a; b]$ . Donc si on prend un échantillon  $(u_1, \dots, u_n)$  de points selon une loi  $\mathcal{U}([a; b])$ , la moyenne arithmétique de l'échantillon  $(f(u_1), \dots, f(u_n))$  doit estimer la quantité  $\frac{\mathcal{I}}{b-a}$ . Dans notre cas  $[a; b] = [0; 1]$  donc on estime directement  $I$ .

Cette méthode se généralise à toute fonction intégrable sur un domaine de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 1$ .



On définit les v.a.r. suivantes :

☞  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0; 1]$ . On note  $f_U$  sa densité.

☞  $V = f(U)$  et  $(V_1, \dots, V_n)$  un échantillon aléatoire de taille  $n$  de  $V$ .

Grâce au théorème de transfert on a :

$$\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[f(U)] = \int_{\mathbb{R}} f(t) f_U(t) dt = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{soit} \quad \mathbb{E}[V] = I$$

De plus on a aussi :

$$\mathbb{E}[V^2] = \mathbb{E}[f^2(U)] = \int_{\mathbb{R}} f^2(t) f_U(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 1 - t^2 dt = \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

En donc finalement :

$$\text{Var}(V) = \mathbb{E}[V^2] - (\mathbb{E}[V])^2 \quad \text{soit} \quad \text{Var}(V) = \frac{2}{3} - I^2$$

On considère alors  $\bar{V}_n = \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n}$ .

$\mathbb{E}[\bar{V}_n] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[V_i]}{n} = \frac{n\mathbb{E}[V]}{n} = \mathbb{E}[V] = I$  par linéarité de l'espérance, donc  $\bar{V}_n$  est un estimateur sans biais de  $I$ .

Puisque  $\bar{V}_n$  est un estimateur sans biais, son RQM est donné par la variance :

$$r_I(\bar{V}_n) = \text{Var}(\bar{V}_n) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}(V_i)}{n^2} = \frac{n\text{Var}(V)}{n^2} = \frac{\text{Var}(V)}{n} \quad \text{soit} \quad r_I(\bar{V}_n) = \frac{2}{3n} - \frac{I^2}{n}$$

**4** En calculant des valeurs approchées de ces deux estimateurs on obtient :

$$r_I(\bar{X}_n) \approx \frac{0,51}{3n} \quad \text{et} \quad r_I(\bar{V}_n) \approx \frac{0,15}{3n}$$

Comme  $r_I(\bar{V}_n) < r_I(\bar{X}_n)$ ,  $\bar{V}_n$  est un estimateur plus efficace que  $\bar{X}_n$ .

5 Les  $(V_1, \dots, V_n)$  sont indépendantes et identiquement distribuées et admettent un moment d'ordre 2. De plus on a  $\mathbb{E}[V_i] = I$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(V_i) = \frac{2}{3} - I^2$ . Le théorème central limite (TCL) nous dit donc :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n V_i - nI}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{V}_n - I}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Autrement dit :

$$\exists! z_\gamma \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \mathbb{P}\left(-z_\gamma \leq \sqrt{n} \frac{\bar{V}_n - I}{\sigma} \leq z_\gamma\right) = \gamma \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bar{V}_n - \frac{\sigma z_\gamma}{\sqrt{n}} \leq I \leq \bar{V}_n + \frac{\sigma z_\gamma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

Or  $I = \frac{\pi}{4}$  donc :

$$\mathbb{P}\left(4\bar{V}_n - \frac{4\sigma z_\gamma}{\sqrt{n}} \leq \pi \leq 4\bar{V}_n + \frac{4\sigma z_\gamma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

On a en particulier que si  $\gamma = 0,95$ , alors  $z_\gamma \approx 1,96$ . Il nous reste à connaître la valeur de  $\sigma$ , or celle-ci dépend de  $I$ . On peut toutefois la majorer si l'on considère que l'on sait que  $\pi \geq 3,1$  et dans ce cas :

$$I \geq 0,775 \implies \sigma = \sqrt{\frac{2}{3} - I^2} \leq 0,257 \implies 4\sigma z_\gamma \leq 2,04$$

On a alors :

$$\mathbb{P}\left(4\bar{V}_n - \frac{2,04}{\sqrt{n}} \leq \pi \leq 4\bar{V}_n + \frac{2,04}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$$

Donc pour obtenir une estimation à  $10^{-2}$  près, il faut choisir  $n$  tel que  $\frac{2,04}{\sqrt{n}} \leq 10^{-2}$ , soit  $n \geq 41\,616$ .

Remarque : convergence lente (en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ) typique des applications du TCL, ce qui rend cette méthode très peu efficace (et donc pas utilisée en pratique pour approximer  $\pi$ ). Toutefois elle a l'avantage d'être facilement adaptable pour approximer le volume de la boule unité en dimension  $d$  (l'efficacité ne dépend pas de la dimension), alors que l'efficacité des autres méthodes numériques s'effondre. Notons qu'il existe également des méthodes de « réduction de la variance » ou de « Monte-Carlo accélérées » qui demandent moins de simulations pour atteindre le même niveau de précision.

Autres applications des Méthodes de Monte-Carlo :

- ☞ En physique des particules pour estimer la forme d'un signal ;
- ☞ Décision financière et performance en bourse ;
- ☞ Recouvrement de courbes ;
- ☞ Estimation de la valeur d'un coup au go ou aux échecs.