Leçon 448 : Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.

Exercice 1 : Maximum de vraisemblance pour le paramètre p d'une loi (N, p) ([DUP] n°5.1 p.243)

Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$. On considère un échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ d'observations d'une variable aléatoire $\mathcal{B}(N, p)$ avec un paramètre inconnu $p \in]0;1[$. Déterminer une estimation $\widehat{p}_{MV}$ de p à l'aide d'un maximum de vraisemblance.

Exercice 2 : Estimation du nombre de Panzers ([DUP] n°5.5 p.243)

On souhaite modéliser la situation historique suivante :

> Pendant la Seconde Guerre Mondiale, les Alliés souhaitaient estimer le volume de production des chars allemands. Ils disposaient pour cela uniquement des numéros de série de n Panzers capturés. On suppose pour simplifier que ces numéros de série étaient attribués séquentiellement : $1, 2, \ldots, N$ où N est le nombre de chars produits. Comment obtenir une estimation fiable de N à partir des n numéros de Panzers capturés ?

1) On considère N suffisamment grand pour assimiler la capture des chars à n tirages *avec remise* parmi N. On note X_k le k-ème numéro de série obtenu pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
   a) Déterminer à l'aide de $\overline{X}_n$ un estimateur T_n sans biais de N.
   b) Montrer que T_n est un estimateur correct de N.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
   b) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $[\![1; N]\!]$, on a $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y \geqslant k)$.
   c) Montrer que $\mathbb{E}[M_n] = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$ et en déduire que $\mathbb{E}[M_n] \geqslant N - \frac{N}{n+1}$.
   d) En déduire que M_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

3) En supposant que les alliés ont capturé les chars numérotés 12, 19, 28, 52 et 64, proposer deux estimations du nombre de chars produits par les Allemands.

Exercice 3 : Approximation de π par des méthodes de Monte-Carlo ([KAR] D8 p.358 & [DUP] n°5.3 p.243)

On pose :

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad I = \int_0^1 f(x)dx$$

1) Quel est le lien de cette intégrale avec π ?
2) Proposer un premier estimateur sans biais de I avec une méthode de Monte-Carlo « naïve ».
3) Proposer un second estimateur sans biais de I avec la méthode de Monte-Carlo standard pour l'intégration numérique.
4) Comparer ces deux estimateurs.
5) À l'aide d'un intervalle de confiance de niveau asymptotique 95 %, déterminer le nombre de lancers permettant d'obtenir une estimation de π avec une précision de 10^{-2} pour le meilleur des 2 estimateurs.

Exercice 4 : Fiabilité d'un vaccin ([BIA] n°5 p.194)

Une entreprise fabrique des vaccins contre la grippe. Afin de respecter les normes internationales, et en acceptant un coefficient de risque $\alpha = 0{,}05$, cette société voudrait connaître à ± 1 % le pourcentage de personnes qui ne seront pas immunisées après injection d'un nouveau vaccin. Sur combien de sujets minimum l'observation doit-elle porter ? On sait par avance que le pourcentage d'échecs à cette vaccination est compris entre 10 % et 15 %. Généraliser le résultats à un risque et une incertitude quelconques.

Exercice 5 : Test paramétrique pour une loi de Bernoulli ([DUP] n°7.1 p.316)

On veut vérifier l'efficacité d'une molécule avant d'autoriser la mise sur le marché d'un médicament. Cette molécule n'est considérée comme efficace que si elle tue au moins 99 % des bactéries visées. On effectue un test sur 10 000 bactéries et on obtient une fréquence de $0{,}995$ bactéries éliminées. Peut-on considérer la molécule comme efficace avec un seuil de confiance supérieur à 95 % ?

Bibliographie :

- [BIA] G. Biau, J. Dronion, M. Herzlich. (2010). *Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature*. EDP Sciences.
- [DUP] G. Dupont. (2020). *Probabilités et statistiques pour l'enseignement*. (2e édition). Dunod.
- [KAR] J. Karmati, S. Polteau. (2020). *51 leçons pour la première épreuve orale d'exposé*. Dunod.