7

Méthode de Newton.

Références :
- Ketrane & Elineau, p. 253

Recasages :
- 201 : Etude de suites définies par différents types de récurrences. On pourra proposer des applications.
- 208 : Théorèmes de points fixes.
- 251 : Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
- 403 : Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
- 443 : Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équat°s $F(X)=0$, X désignant une variable réelle ou vectorielle.

$a, b \in \mathbb{R}$, $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Lorsque c'est possible, on définit
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} x_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$.

① Soit $\alpha \in]a;b[$ tq $f(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)\neq 0$
Alors $\exists F$ un voisinage de α tq $\forall x_0 \in F$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Sous réserve qu'elle soit bien définie, on pose
$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

(A) Donc α solution de $f(x)=0$ $\iff$ α est un point fixe de φ

Principe de la preuve de 1 :

- Mq φ est contractante par le thm des acc. finis.
- Utiliser le thm du pt fixe.

$f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ donc f' est continue sur I et comme $f'(\alpha) \neq 0$, $\exists\, \mathcal{V}$ un voisinage de α sur lequel f' ne s'annule pas.

$\Rightarrow$ $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ est bien définie et dérivable sur $\mathcal{V}$ et :

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(\alpha) = \frac{\overbrace{f(\alpha)}^{=0}\cdot f''(\alpha)}{\underbrace{[f'(\alpha)]^2}_{\neq 0}} = 0.$$

De plus, $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V}, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists\, F \subseteq \mathcal{V}$ un voisinage de α sur lequel :

$|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in F$

D'après l'inégalité des accroissements finis on a donc :

$\forall x, y \in F \ : \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|$,

C'est-à-dire que φ est contractante sur F.

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \varphi(F) \subseteq F \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie} \\ \text{Par le théorème du point fixe : } \varphi \text{ admet un unique point fixe et } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV vers ce point fixe, qui est } \alpha \text{ par unicité.} \end{cases}$

2 Supposons $f(a)\cdot f(b) < 0$ et $\forall x \in I$, $f'(x)\cdot f''(x) \neq 0$.

a) $\forall x_0 \in [a, b[$ tq $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, monotone, et cv. vers α.

On peut supposer sans perte de généralité que :
$\forall x \in I$, $\underline{f'(x) > 0}$ et $\underline{f''(x) > 0}$.
En effet, on a $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$ et :
- Si $\underline{f' < 0 \text{ et } f'' < 0}$, on remplace $\underline{f \text{ par } -f}$
- Si $\underline{f' > 0 \text{ et } f'' < 0}$, on remplace $\underline{f \text{ par } x \mapsto -f(-x)}$
- Si $\underline{f' < 0 \text{ et } f'' > 0}$, on remplace $\underline{f \text{ par } x \mapsto f(-x)}$

Principe de la preuve de ② a) :
- Mq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie avec Taylor-Lagrange
- Mq $f(x)=0$ admet une unique solution avec TVI
- Mq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et CV vers α

à inverser avec l'étape suivante

* Mq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie :
- $f'>0$ sur I donc φ est bien définie
- $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ donc d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :
  $\exists \theta_x$ compris strictement entre x et α tq :

$$\underbrace{f(\alpha)}_{=0} = f(x) + (\alpha - x)\cdot f'(x) + \frac{(\alpha-x)^2}{2}\cdot f''(\theta_x)$$

$$\Rightarrow \quad x - \alpha - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(\alpha - x)^2}{2} \cdot \frac{f''(\theta_x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) - \alpha = (x-\alpha)^2 \cdot \frac{f''(\theta_x)}{2f'(x)} \quad \textbf{(B)}$$

- (B) est vraie $\forall x \in I$ et :
  * $\left.\begin{array}{l} f'>0 \text{ sur } I \\ f''>0 \text{ sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\varphi(x) \geq \alpha} \ \forall x \in I$ (*)
  * $f'>0$ sur $I \Rightarrow \underline{f \text{ est croissante}}$ sur I.

D'où :

$$x \in [\alpha, b] \Leftrightarrow f(x) \geq \underbrace{f(\alpha)}_{=0} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \textbf{(C)}$$

De plus $\forall x \in [\alpha, b]$:

$$x - \underbrace{\frac{f(x)}{f'(x)}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{par (C)}}} \leq x \Rightarrow \varphi(x) \leq x$$

D'où : $\alpha \overset{(*)}{\leq} \varphi(x) \leq x \overset{\substack{\text{par déf :} \\ x \in [\alpha, b]}}{\leq} b$ (D)

$\Rightarrow$ $[\alpha, b]$ est stable par φ. $(*_1)$

De plus par hypothèse :

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \\ f'' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in [\alpha, b] \quad (*_2)$$

$(*_1)$ et $(*_2)$ $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

en fait, il faudrait faire ça avant !

* Mq $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$:

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow f \text{ continue.} \\ f' > 0 \Rightarrow f \text{ strictement croissante} \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array}\right\}$$ d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$.

* Mq $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et cv vers α :

(D) $\Rightarrow \alpha \leq \varphi(x_n) \leq x_n \leq b$

$\Rightarrow \alpha \leq x_{n+1} \leq x_n \leq b$

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par α, donc elle cv vers un point fixe de φ (car φ est continue).

Or α est l'unique solution de $f(x) = 0$ donc d'après (A), α est l'unique pt fixe de φ.

Donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Majoration de l'erreur d'approximation :

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \alpha| \leq (b-a) \cdot \left[(b-a) \frac{M_2}{2m_1}\right]^{2^n - 1} \longrightarrow P(n).$$

avec :

$$m_1 = \inf_{x \in I} |f'(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$$

Preuve par récurrence sur n :

* Initialisation :

$x_0, \alpha \in [a, b] \Rightarrow |x_0 - \alpha| \leq b - a$

$\Rightarrow P(0)$ est vérifiée.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ soit vraie.

(B) $\Rightarrow$ $|x_{n+1} - \alpha| = |x_n - \alpha|^2 \cdot \underbrace{\left|\frac{f''(\theta_x)}{2f'(x_n)}\right|}_{\leq}$

$$\overset{P(n)}{\leq} \left[(b-a) \cdot \left[\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right]^{2^n - 1}\right]^2 \cdot \frac{M_2}{2m_1}$$

$$\leq (b-a)^2 \cdot \frac{M_2}{2m_1} \cdot \left[\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right]^{2^{n+1} - 2}$$

$$\leq (b-a)^{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{M_2}}{\cancel{2m_1}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{m_1}}{\cancel{M_2}} \cdot \left[\frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_2}{m_1}\right]^{2^{n+1} - 1}$$

$$\leq (b-a) \cdot \left[(b-a) \cdot \frac{M_2}{2m_1}\right]^{2^{n+1} - 1}$$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vérifiée.

* Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Rmqs :

- Vitesse de CV quadratique.
- Méthode très efficace si le pt de départ est proche de α.

BONUS: Exemple d'application

Objectif: Calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

- $\sqrt{2}$ est l'unique solution réelle (positive) de l'équation:

$$x^2 - 2 = 0.$$

On pose alors:

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2.$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 2x \\ f''(x) = 2. \end{cases}$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (et même $\mathcal{C}^\infty$).

- On définit alors la suite:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \end{cases}$$

- Par exemple pour $x_0 = 2$:

* $x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 3 = 1,5.$

* $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{9+8}{6} = \frac{17}{12} \simeq 1,4167$

C'est déjà correct !

En Python:

```
def newton_rac2(x0, n):
    x = x0
    print(f"Initialisation : x_0 = {x0}")
    for i in range(n):
        x = 0.5 * ( x + 2/x )
        print(f"x_{i+1} = {x}")
    return 0
```

En partant de $x_0 = 2e9$, on cv en 35 itérations.