

Séquence 10 : Théorème de Thalès (1) - Sens direct

🖋️🖋️🖋️ **OBJECTIFS :** 🖋️🖋️🖋️

À la fin de cette Séquence 10, je dois connaître ...	Pour m'entraîner :
Pourquoi utiliser le théorème de Thalès dans le sens direct.	Cours
Les 2 configurations du théorème de Thalès.	Cours
Les étapes de démonstration avec le théorème de Thalès dans le sens direct.	Cours

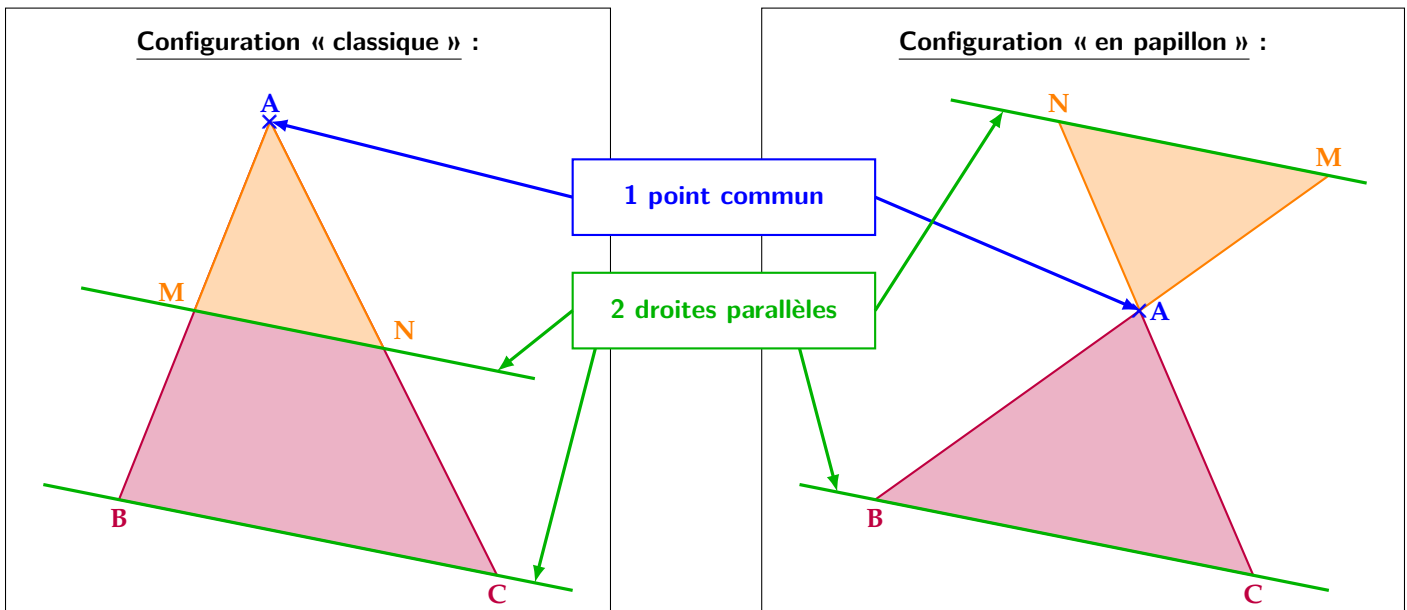
Je dois savoir faire ...	Pour m'entraîner :		
	☆	☆☆	☆☆☆
Reconnaître quand utiliser le théorème de Thalès dans le sens direct.	n°1		
Justifier que des droites sont parallèles pour pouvoir utiliser le théorème de Thalès.	n°2	n°3	
Écrire les égalités de rapports.	n°4		
Utiliser le théorème de Thalès dans le sens direct (dont type brevet).	n°5, 6	n°7	n°8

A) Cours

Rappels : Nous avons vu dans la séquence 5 les **triangles semblables**. Deux triangles sont semblables si :

- ☞ leurs angles sont 2 à 2 égaux
- ☞ leurs longueurs sont 2 à 2 proportionnelles

Le **théorème de Thalès** est une configuration particulière des triangles semblables, qui permet de **trouver des longueurs manquantes** :



☞ Méthode 1 : Démontrer avec le théorème de Thalès

On sait que :

- ☞ Les points **A**, **M** et **B** sont alignés d'une part.
- ☞ Les points **A**, **N** et **C** sont alignés d'autre part.
- ☞ Les droites **(MN)** et **(BC)** sont parallèles.

Donc d'après le **théorème de Thalès** :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \left(= \frac{\text{petit triangle}}{\text{grand triangle}} \text{ ou l'inverse} \right)$$

Il suffit ensuite de :

- ☞ Remplacer par les valeurs connues puis :
- ☞ D'effectuer un produit en croix pour trouver la valeur recherchée !

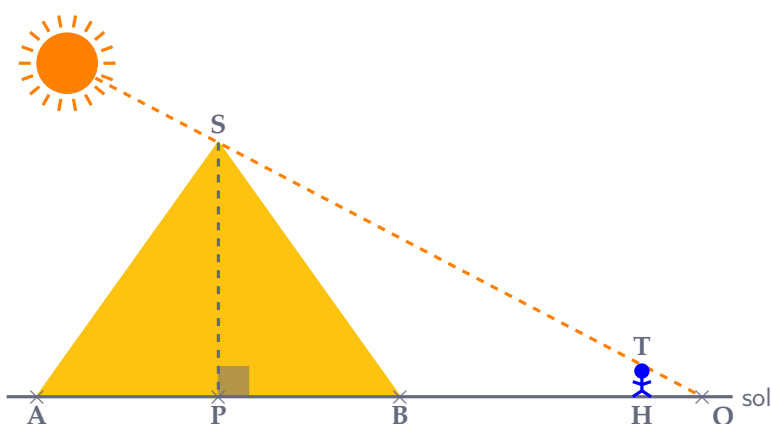
B) Exemples

☞ Exemple(s) :



Thalès de Millet est un philosophe et savant grec qui aurait vécu aux alentours de 600 avant J-C. On lui attribue de nombreux exploits comme la prédiction d'une éclipse de soleil ou encore **le calcul de la hauteur de la pyramide de Kheops** (voir photographie ci-contre).

Pour mesurer ce bâtiment, il aurait utilisé l'alignement entre son ombre et celle de la pyramide.



On donne les mesures suivantes :

- ☞ Thalès mesurait 1,73 m donc $TH = 1,73$ m
- ☞ Son ombre mesurait 3,5 m donc $OH = 3,5$ m
- ☞ L'ombre de la pyramide mesurait 163,4 m donc :
 $OB = 163,4$ m
- ☞ La base de la pyramide a une longueur de 231 m donc :
 $AB = 231$ m

1) Calculer la longueur PB , puis en déduire la longueur OP :

$$PB = \frac{AB}{2} = \frac{231}{2} = 115,5 \text{ m} \quad \text{et} \quad OP = PB + BO = 115,5 + 163,4 = 278,9 \text{ m.}$$

2) Justifier le fait que les droites (SP) et (TH) sont parallèles :

On sait que (SP) et (TH) sont toutes les deux perpendiculaires à (OP) .

Or : **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.** (6^{ème}!!!)

Donc les droites (SP) et (TH) sont parallèles.

3) En déduire la hauteur de la pyramide :

On sait que :

- ☞ Les points O, H et P d'une part ; et O, T et S d'autre part sont alignés.
- ☞ Les droites (SP) et (TH) sont parallèles.

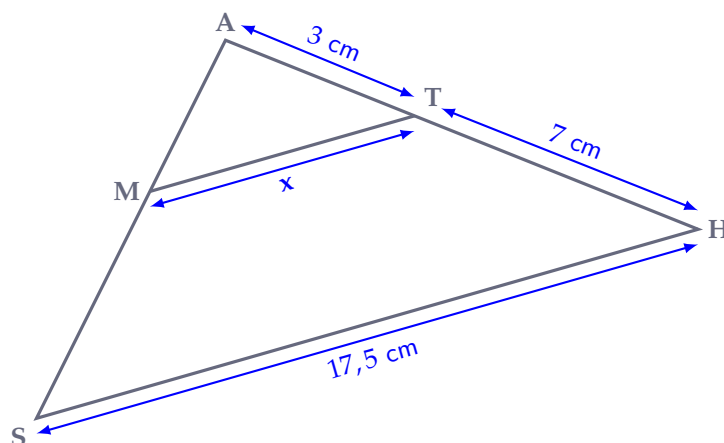
Donc d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{OH}{OP} = \left(\frac{OT}{OS} \right) = \frac{TH}{SP} \text{ d'où :}$$

$$\frac{3,5}{278,9} = \frac{1,73}{SP} \text{ et avec un produit en croix : } SP = \frac{1,73 \times 278,9}{3,5} \approx 137,9 \text{ m}$$

La pyramide mesure donc environ 138 m de haut. (d'après Wikipédia : 137 m actuellement ; 146,58 m à l'origine)

Exemple(s) :



Sachant que les droites (MT) et (SH) sont parallèles, calculer x :

On sait que :

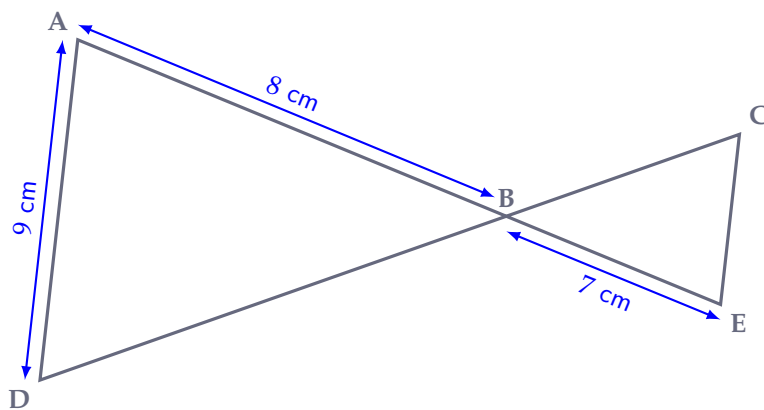
- ☞ Les points A , M et S d'une part ; et A , T et H d'autre part sont alignés.
- ☞ Les droites (MT) et (SH) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès on a :

$$\left(\frac{AM}{AS}\right) \frac{AT}{AH} = \frac{MT}{SH} \text{ d'où :}$$

$$\frac{3}{3+7} = \frac{x}{17,5} \text{ et avec un produit en croix : } x = \frac{3 \times 17,5}{10} = 5,25 \text{ cm}$$

Exemple(s) :



Sachant que les droites (AD) et (CE) sont parallèles, calculer la longueur CE :

On sait que :

- ☞ Les points A , B et E d'une part ; et D , B et C d'autre part sont alignés.
- ☞ Les droites (AD) et (CE) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès on a :

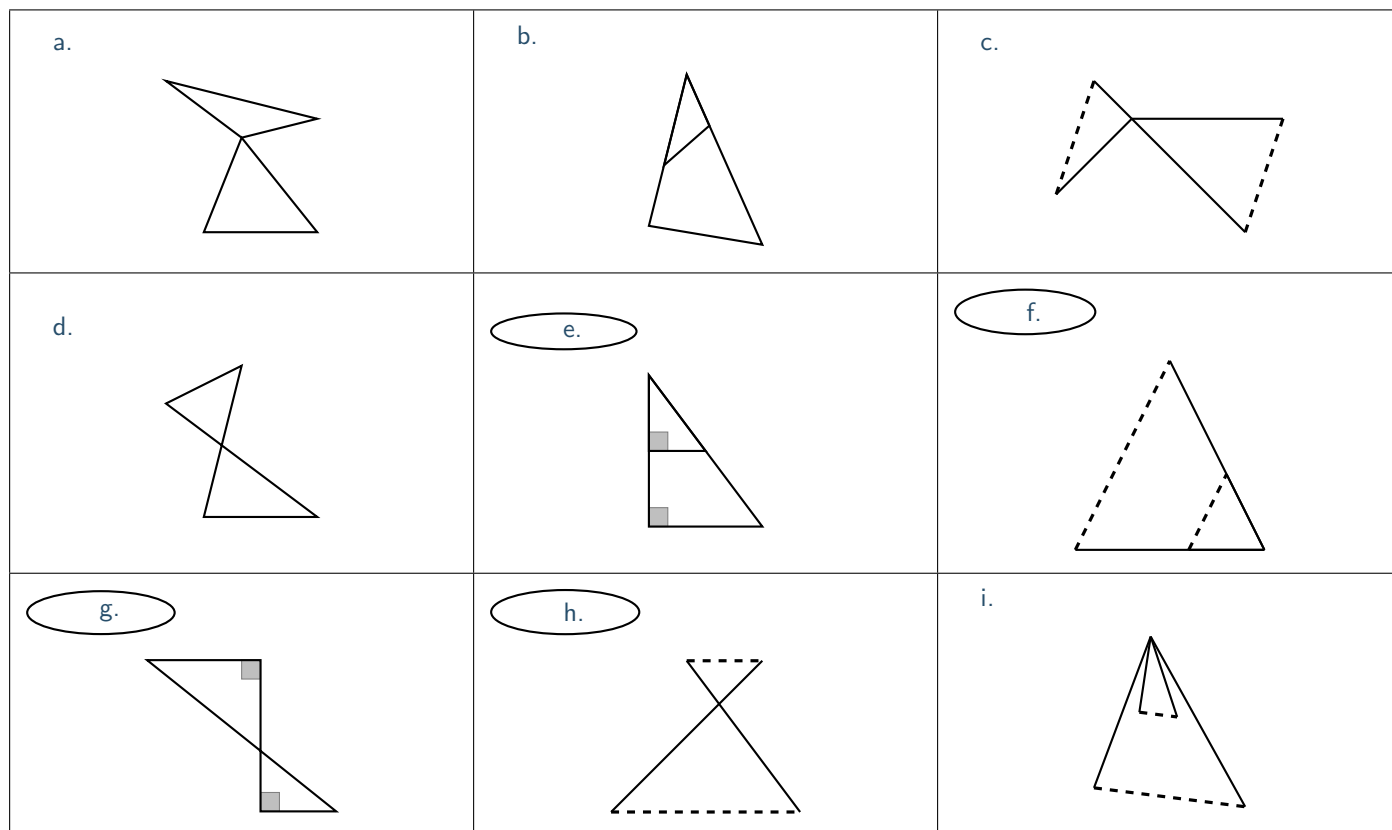
$$\frac{BA}{BE} = \left(\frac{BD}{BC}\right) = \frac{AD}{CE} \text{ d'où :}$$

$$\frac{8}{7} = \frac{9}{CE} \text{ et avec un produit en croix : } CE = \frac{9 \times 7}{8} = 7,875 \text{ cm}$$

Exercices

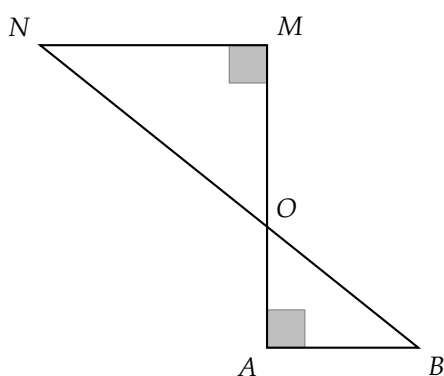
Exercice 1 : ☆

Les segments en pointillés sont parallèles. Dans quelles figures peut-on utiliser le théorème de Thalès ?



Exercice 2 : ☆

Dans la figure ci-dessous, que peut-on dire des droites (AB) et (MN) ? Justifier.



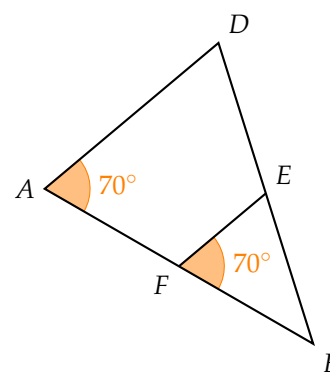
On sait que les droites (AB) et (MN) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AM) (d'après les codages du dessin).

Or si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc (AB) et (MN) sont parallèles.

Exercice 3 : ☆☆

Dans la figure ci-dessous, que peut-on dire des droites (AD) et (FE) ? Justifier.



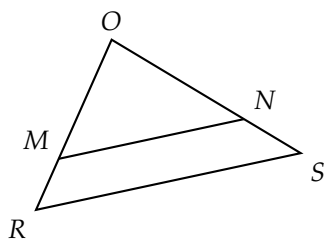
On sait que les angles **correspondants** \widehat{BFE} et \widehat{BAD} sont de même mesure, et déterminés par les droites (AD) et (FE) , et la sécante (BA) .

Or si deux angles correspondants sont de même mesure, alors les deux droites coupées par la sécante sont parallèles.

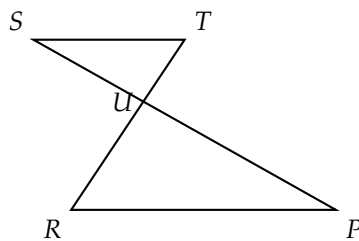
Donc (AD) et (FE) sont parallèles.

Exercice 4 : ☆

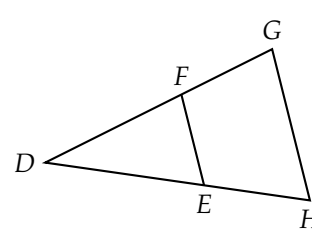
Dans chacun des cas suivants, écris tous les rapports de longueurs égaux.
On supposera que les droites nécessaires sont bien parallèles.



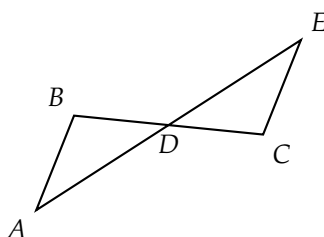
$$\frac{OM}{OR} = \frac{ON}{OS} = \frac{MN}{RS}$$



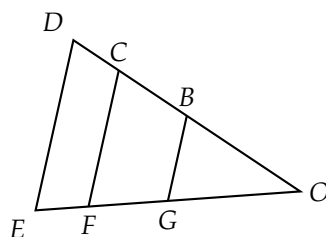
$$\frac{US}{UP} = \frac{UT}{UR} = \frac{ST}{RP}$$



$$\frac{DE}{DH} = \frac{DF}{DG} = \frac{EF}{HG}$$



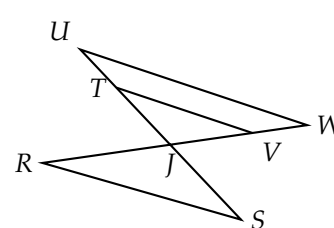
$$\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{CE}$$



$$\frac{OG}{OF} = \frac{OB}{OC} = \frac{GB}{FC}$$

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OC}{OD} = \frac{FC}{ED}$$

$$\frac{OG}{OE} = \frac{OB}{OD} = \frac{GB}{ED}$$

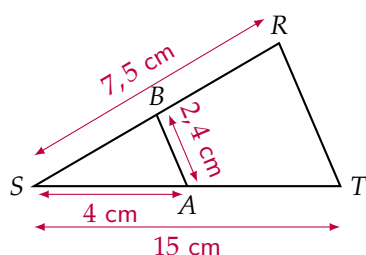


$$\frac{JR}{JW} = \frac{JS}{JU} = \frac{RS}{UW}$$

$$\frac{JR}{JV} = \frac{JS}{JT} = \frac{RS}{TV}$$

$$\frac{JT}{JU} = \frac{JV}{JW} = \frac{TV}{UW}$$

Exercice 5 : ☆



Dans la figure ci-dessous, les droites (AB) et (TR) sont parallèles. **Calculer SB et RT :**

On sait que :

- ☞ Les points S, A et T d'une part ; les points S, B et R d'autre part sont alignés.
- ☞ Les droites (AB) et (TR) sont parallèles.

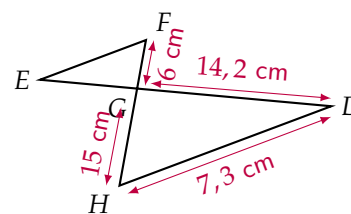
Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SA}{ST} = \frac{SB}{SR} = \frac{AB}{RT} \text{ d'où : } \frac{4}{15} = \frac{SB}{7,5} = \frac{2,4}{RT}$$

Et avec des produits en croix on trouve :

$$\mathbf{SB = \frac{4 \times 7,5}{15} = 2 \text{ cm}} \text{ et } \mathbf{RT = \frac{2,4 \times 15}{4} = 9 \text{ cm}}$$

Exercice 6 : ☆



Dans la figure ci-dessous, les droites (EF) et (HD) sont parallèles. **Calculer EF et EG :**

On sait que :

- ☞ Les points E, G et D d'une part ; les points F, G et H d'autre part sont alignés.
- ☞ Les droites (EF) et (HD) sont parallèles.

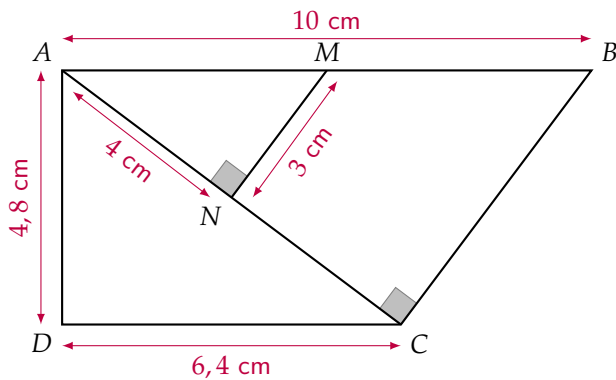
Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{GE}{GD} = \frac{GF}{GH} = \frac{EF}{HD} \text{ d'où : } \frac{GE}{14,2} = \frac{6}{15} = \frac{EF}{7,3}$$

Et avec des produits en croix on trouve :

$$\mathbf{EF = \frac{6 \times 7,3}{15} = 2,92 \text{ cm}} \text{ et } \mathbf{EG = \frac{6 \times 14,2}{15} = 5,68 \text{ cm}}$$

Exercice 7 : ☆☆☆



1) Démontrez que les droites (MN) et (BC) sont parallèles :

On sait que les droites (MN) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AM) (d'après les codages du dessin).

Or si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc (MN) et (BC) sont parallèles.

2) Calculer la longueur AM :

On sait que le triangle AMN est rectangle en N , donc d'après le **théorème de Pythagore** on a :

$$AM^2 = AN^2 + MN^2$$

$$AM^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$AM = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

3) Calculer la longueur BC :

☞ Les points A, N et C d'une part ; les points A, M et B d'autre part sont alignés.

☞ Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \text{ d'où : } \frac{4}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{3}{BC}$$

Et avec un produit en croix on trouve : $BC = \frac{3 \times 10}{5} = 6 \text{ cm}$

4) Démontrer que le triangle ADC est rectangle (plusieurs méthodes sont possibles) :

En reprenant la question 3, on a avec un autre produit en croix : $AC = \frac{4 \times 10}{5} = 8 \text{ cm}$. Ensuite 2 méthodes sont possibles :

Méthode 1 - Avec les triangles semblables :

ABC	6 cm	8 cm	10 cm
ADC	4,8 cm	6,4 cm	8 cm

$$\frac{6}{4,8} = 1,25 \text{ et } \frac{8}{6,4} = 1,25 \text{ et } \frac{10}{8} = 1,25$$

C'est un tableau de proportionnalité, donc les triangles ABC et ADC sont semblables, donc ils ont leurs angles 2 à 2 égaux et en particulier : $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Méthode 2 - Avec la réciproque de Pythagore :

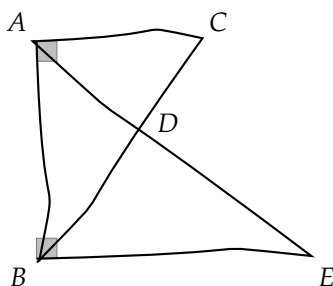
On a d'une part (AC est le plus grand côté) : $AC^2 = 8^2 = 64$

Et d'autre part : $AD^2 + CD^2 = 4,8^2 + 6,4^2 = 23,04 + 40,69 = 64$

On a bien $AC^2 = AD^2 + CD^2$, l'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ADC est rectangle en D .

Exercice 8 : ☆☆☆

(D'après DNB France métropolitaine, Septembre 2013)



1) Déterminer l'aire du triangle ABE :

1) On sait que les droites (AC) et (EB) sont toutes les deux perpendiculaires à (AB) . Or **si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles**. Donc (AC) et (EB) sont parallèles.

2) De plus les points A, D et E d'une part ; les points C, D et B d'autre part sont alignés.

Donc **d'après le théorème de Thalès** :

$$\left(\frac{DA}{DE} = \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{BE}\right) \text{ d'où } \frac{1,5}{2,5} = \frac{2,4}{BE}$$

Et avec un produit en croix on obtient : $BE = \frac{2,4 \times 2,5}{1,5} = 4 \text{ cm}$.

3) On peut enfin calculer : $\mathcal{A}_{ABE} = \frac{AB \times BE}{2} = \frac{3,2 \times 4}{2} = 6,4 \text{ cm}^2$

La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle.
On donne les informations suivantes :

☞ $AC = 2,4 \text{ cm}$; $AB = 3,2 \text{ cm}$

☞ $BD = 2,5 \text{ cm}$; $DC = 1,5 \text{ cm}$

☞ (AC) est perpendiculaire à (AB) ,
 (EB) est perpendiculaire à (AB) et
 (AE) et (BC) se coupent en D

Mises au Travail

