Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.

DÉTAILS / DEMOS

* **Déf: Algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$:**

$(A,+,\cdot,\times)$ telle que : $\begin{cases} (A,+,\cdot) \text{ est un } \mathbb{K}ev \\ \times : A\times A \longrightarrow A \quad \text{(loi interne)} \\ \times \text{ est bilinéaire} \end{cases}$

ex: $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot,\times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative non commutative de dim. n^2.

* **Thm de décomposition des noyaux :** [GOU ALG] p.175

On procède par récurrence sur $k\geq 2$:

* **Initialisation:** $P = P_1P_2$ avec $P_1\wedge P_2 = 1$.

Par le thm de Bézout, il existe $U,V\in\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$UP_1 + VP_2 = 1 \quad (*)$$

• Soit $x\in \mathrm{Ker}(P_1(u))\cap \mathrm{Ker}(P_2(u))$ $\Rightarrow$ $P_1(u)(x) = P_2(u)(x) = 0$

$(UP_1+VP_2)(u)(x) = x$ par la relation précédente $(*)$.

$\Rightarrow x = U(u)\circ \underbrace{P_1(u)(x)}_{=0} + V(u)\circ \underbrace{P_2(u)(x)}_{=0} = U(u)(x) + V(u)(x) = 0$.

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Ker}(P_1(u))\cap \mathrm{Ker}(P_2(u)) = \{0\}}$.

• Soit $x\in \mathrm{Ker}(P(u))$. On a avec $(*)$:

$$UP_1(u)(x) + VP_2(u)(x) = x \quad (**)$$

Or $P_2(u)[UP_1(u)(x)] = U\underbrace{P_1P_2}_{P}(u)(x) = U(u)\circ \underbrace{P(u)(x)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow UP_1(u)(x) \in \mathrm{Ker}(P_2(u))$.

De même, $VP_2(u)(x)\in \mathrm{Ker}(P_1(u))$.

Avec $(**)$ on a alors : $\underline{\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u))}$.

On a donc bien : $\underline{\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))}$.

* **Hérédité:** on suppose la propriété $\mathcal{P}$ vraie pour $k\geq 2$.

On a $P = Q_1Q_2$ avec $\begin{cases} Q_1 = P_1\cdots P_k \\ Q_2 = P_{k+1} \end{cases}$

$Q_1\wedge Q_2 = 1$ donc d'après le cas $k=2$ on a :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(Q_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q_2(u)) \overset{\mathcal{P}(k)}{=} \mathrm{Ker}(P_1(u))\oplus\dots\oplus \mathrm{Ker}(P_k(u))\oplus \mathrm{Ker}(P_{k+1}(u)).$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

$\boxtimes$

* Rappels sur les éléments propres :
  - $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u $\Leftrightarrow$ $\exists x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
    x est alors appelé vecteur propre associé à λ.
  - Soit λ une valeur propre de u.
    $E_\lambda = \ker(u - \lambda \cdot id_E)$ est le sous-espace propre associé à λ.
  - L'ensemble des valeurs propres de u est son spectre $Sp(u)$.
  - Thm : $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in Sp(u)$ distinctes $\Rightarrow$ $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

* Thm de Cayley-Hamilton : [GOU AlG] p. 177

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et χ_u son polynôme caractéristique.
On pose la matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ (0) & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \text{ où}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = (-1)^p \left(X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0 \right).$$

Lemme

Montrons ce résultat par récurrence sur p :

* Initialisation : $p = 1$: évident.
* Hérédité : Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$.
  On développe le déterminant par rapport à la première ligne :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots\ -X & -a_{p-1} \\ (0) & 1 & -X-a_p \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & & -a_1 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots\ -X & -a_{p-1} \\ (0) & 1 & -X-a_p \end{vmatrix} + (-1)^{p-1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & (0) \\ & \ddots & \ddots \\ & & -X \\ (0) & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{hyp. de réc.}}{=} (-1)^{p+1} X \left(X^p + a_p X^{p-1} + \dots + a_1 \right) + (-1)^{p-1} a_0$$

$$= (-1)^{p+1} \left(X^{p+1} + a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0 \right)$$

Soit $x \in \mathcal{L}(E)^*$. $\exists p > 0$ minimal tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est liée.

$\Rightarrow$ $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

$\Rightarrow$ $\exists a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tel que : $u^p(x) + a_{p-1} u^{p-1}(x) + \dots + a_0 x = 0$ $(*)$.

On complète $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ en une base $\mathcal{B}$ de E.

Alors on pose :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline & C \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Or $\chi_u = P_A \cdot P_C$, donc $\chi_u(u)(x) = P_C(u) \circ P_A(u)(x)$ soit d'après $(*)$
et le lemme : $P_A(u)(x) = u^p(x) + a_{p-1} u^{p-1}(x) + \dots + a_0 x = 0$

$\Rightarrow$ $\chi_u(u)(x) = 0$. C'est vrai $\forall x \in \mathcal{L}(E)^*$, donc $\chi_u(u) = 0$. ☒

* **Décomposition de Dunford :** [SKA AlG] p.233

• Existence : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ les valeurs propres distinctes de u.
$\forall j \in [\![1;K]\!]$, on note N_j l'espace caractéristique associé à λ_j :

$$N_j = \ker (u - \lambda_j \cdot id_E)^{n_j} \quad \text{avec} \quad \chi_u(X) = (X-\lambda_1)^{n_1} \dots (X-\lambda_K)^{n_K}.$$

D'après le thm de décomposition des noyaux on a :

$$E = N_1 \oplus \dots \oplus N_K.$$

On note p_j le projecteur d'image N_j et de noyau $\bigoplus_{i \neq j} N_i$.

On pose alors $d = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j p_j$.

d est diagonalisable car son espace propre pour λ_j est N_j.

On pose ensuite $n = u - d$.

= je vois vaguement pourquoi

$\forall j \in [\![1;K]\!]$, N_j est stable par n. De plus, l'endomorphisme induit par n coïncide avec celui induit par $u - \lambda_j \cdot id_E$.
=> il est nilpotent.
=> n est nilpotent.

Enfin, les p_j sont des polynômes en u, donc d et n aussi : ils commutent donc.

• Unicité : Soit (d,n) le couple construit ci-dessus.
Soit (d',n') un autre couple vérifiant les conditions.

d' commute avec u, donc avec tout polynôme en u.
=> d' commute avec d.
=> d et d' sont simultanément diagonalisables.
De même, n et n' commutent, donc $n'-n$ est nilpotent (par la formule du binôme).
Or $d - d' = n' - n$, qui est donc nilpotent.
Donc toutes ses valeurs propres sont nulles. Comme il est également diagonalisable, il est nul.
Donc $d = d'$ et $n = n'$.

$\square$

* **Application :** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer son exponentielle. [GOU AlG] p.199

Polynôme caractéristique :

$$P_M = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 6-X & -3 \\ 4 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6-X & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)[X(X-6)+12] - [-12 + 2(6-X)]$$

$$P_M = (1-X)\left(X^2 - 6X + 12\right) + \left(2X - \cancel{12} + \cancel{12}\right)$$

$$= X^2 - 6X + 12 - X^3 + 6X^2 - 12X + 2X$$

$$= -X^3 + 7X^2 - 16X + 12$$

$\Rightarrow$ $\underline{P_M = -(X-2)^2(X-3)}$.

$\Rightarrow$ Les v.p. de M sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

On utilise le polynôme annulateur $F = (X-2)^2(X-3)$.

On pose $Q_1 = (X-3)$ et Q_2 ...

Bon flemme. Trop long, trop compliqué.