110 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I] Généralités.

Déf 1: $\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ par : $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$.

Prop. 2: $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et l'application :

$$\varphi_u : (\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) \to (\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot), \quad P \mapsto P(u)$$

est un morphisme d'algèbres.

Thm 3: Décomposition des noyaux :

Soit $P = P_1 \cdots P_k \in \mathbb{K}[X]$ avec $(P_1, \dots, P_k)$ premiers entre eux deux à deux.

Alors : $\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(P_k(u))$.

II] Polynômes annulateurs.

Déf 4: Soit $P \in \mathbb{K}[X]^*$.

P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ppté 5: Tout endomorphisme en dimension finie admet un polynôme annulateur.

Rmq : Faux en dimension infinie ! → les projecteurs en ont → la dérivation non !

Ppté 6: Soit P un polynôme annulateur de u.

λ valeur propre de $u \Rightarrow P(\lambda) = 0$.

Rmq : Réciproque fausse.

Thm 7: u est diagonalisable ssi il possède un polynôme annulateur à racines simples.

Déf/ppté 8: L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme unitaire qui engendre cet idéal est appelé polynôme minimal, noté μ_u.

Ppté 9: μ_u est le polynôme unitaire de plus bas degré annulant u, et si $Q(u) = 0$, alors $\mu_u \mid Q$.

Ppté 10: $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \mu_u(\lambda) = 0$

Cor 11: $\deg(\mu_u) = \dim(\mathbb{K}[u])$.

Déf/Ppté 12: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Il ne dépend pas de la base choisie pour représenter u et on le note χ_u.

Rmq : si on le définit comme $\det(A - XI_n)$, il n'est plus unitaire.

Ex 13: u nilpotent $\Rightarrow \chi_u = X^n$.

Ppté 14: $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$.

Thm 15: Cayley-Hamilton :

$\chi_u(u) = 0$

III] Applications.

Thm 16: Décomposition de Dunford :

χ_u scindé sur $\mathbb{K} \Rightarrow \exists! (d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

$$\begin{cases} d \text{ est diagonalisable} \\ n \text{ est nilpotente} \\ f = d + n \\ d \circ n = n \circ d \end{cases}$$

Ex 17: Calculer l'exponentielle de $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

↳ Trop long. Il y a des exos plus simples dans le Skandalis.

Pour les applications, voir [SKA] p. 233 et suivantes.

- suites récurrentes
- graphes