Leçon 125 : Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3. Décomposition canonique. Applications.

Soit $\overrightarrow{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, et E un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
Soit f une isométrie affine de partie linéaire $\vec{f}$.

1) Généralités sur les isométries de E.

On suppose ici $dim(E) = n$.

Définition 1 : $f : E \to E$ est une **isométrie** de E si c'est une bijection qui conserve les distances.

Propriété 2 : L'ensemble $Isom(E)$ des isométries de E est un sous-groupe de $S(E)$ pour la composition $\circ$.

Définition 3 : f est une isométrie affine :
- **directe** (un **déplacement**) si $\det(\vec{f}) = +1$. On note $\vec{f} \in Isom^+(E)$.
- **indirecte** (un **anti-déplacement**) si $\det(\vec{f}) = -1$. On note $\vec{f} \in Isom^-(E)$.

Propriété 4 : $Isom^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $Isom(E)$.

Application 5 : Groupe des isométries du cube (DÉV)
On note C l'ensemble des 8 sommets d'un cube. Alors on a :

$$Isom(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

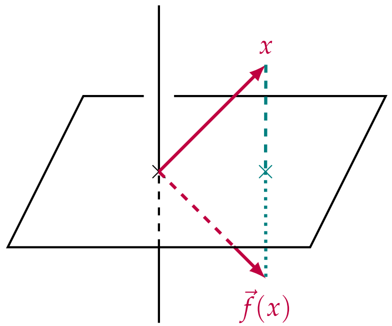
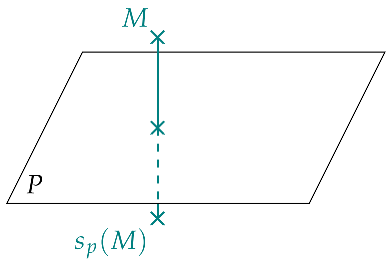
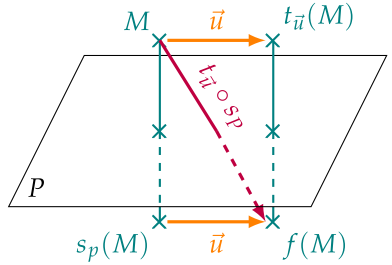
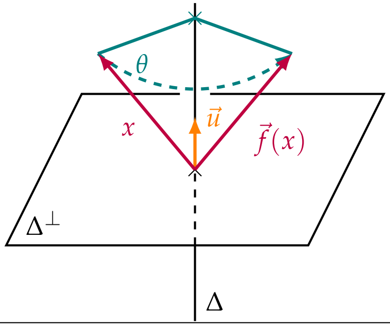
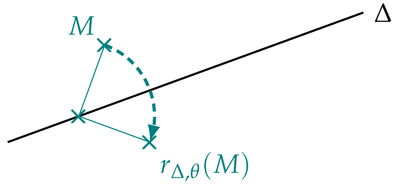
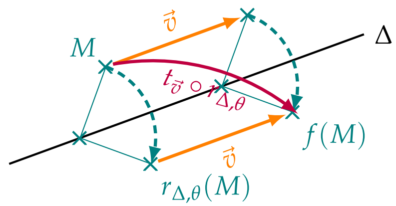
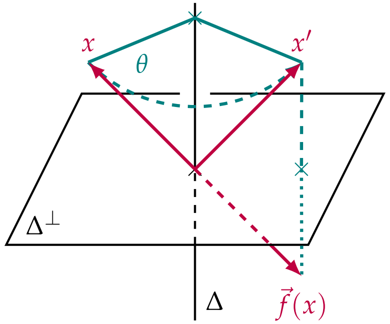
Théorème 6 : Décomposition canonique
Toute isométrie f de E s'écrit de manière unique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$ et $g \in Isom(E)$ a un point fixe.
De plus, $\vec{u} \in \ker\left(\vec{f} - id_{\overrightarrow{E}}\right)$

2) Classification des isométries en dimension 3.

Voir tableau en page suivante !

Sources :

- [SKA Alg] G. Skandalis. (2017). *Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie*. Collection Im-et-Ker. Calvage & Mounet.
- [ROM] J.-É. Rombaldi. (2021). *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie* (2e édition). De Boeck Supérieur.
- Cours de Catherine Gilles du 18/01/2023.

$\vec{f}$	$\det(\vec{f})$	$dim\left(\ker(\vec{f}-id_{\vec{E}})\right)$	Matrice de $\vec{f}$ (base adaptée)	f **avec** points fixes	f **sans** points fixes
Identité $id_{\vec{E}}$	$+1$	3	I_3	id_E	$t_{\vec{u}}$
Réflexion : 	-1	2	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$	Réflexion s_P par rapport à un plan : 	$t_{\vec{u}} \circ s_P$: réflexion glissée : 
Rotation d'axe Δ et d'angle θ : 	$+1$	1	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right)$	Rotation $r_{\Delta,\theta}$: 	$t_{\vec{u}} \circ r_{\Delta,\theta}$: vissage : 
Anti-rotation : 	-1	0	$\left(\begin{array}{c\|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right)$	Symétrie-rotation	N'existe pas. En effet : Soit f une application affine. Si 1 est valeur propre de $\vec{f}$, alors f a un unique point fixe (en particulier, f a au moins un point fixe).