221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples. ①

DÉTAILS / DÉMOS

* **Intégrale de Riemann** : [DAN] p. 226

$$F : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$$

• Si $\alpha = 1$: $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Donc l'intégrale est divergente.

• Si $\alpha \neq 1$: $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$

Donc l'intégrale converge ssi $\alpha > 1$. Dans ce cas : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

Rmq : Même principe pour $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha}$ cv ssi $\alpha < 1$.

▨

* **Fonction Gamma** : [MEY O] p. 81-82

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} . e^{-t}\, dt$$

• Soit $x > 0$ fixé, montrons que $\Gamma(x)$ est bien définie.

* $t \mapsto t^{x-1}. e^{-t}$ est continue sur $]0;+\infty[$

* En 0^+ : $t^{x-1}. e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$, or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge ssi $\underbrace{1-x<1}_{\text{Riemann}}$, donc ssi $x>0$, ce qui est le cas.

$\Rightarrow$ l'intégrale converge en 0^+.

* En $+\infty$: $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}. e^{-t} = 0 \Rightarrow \exists T>0$ tel que $\forall t \geq T$, $t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$.

Par comparaison avec l'intégrale de Riemann, elle converge donc aussi en $+\infty$.

• Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$:

$(x,t) \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $[a,b] \times \mathbb{R}_+^*$. De plus :

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R}_+^* \quad |t^{x-1}.e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{a-1}. e^{-t} & \text{si } t<1 \\ t^{b-1}. e^{-t} & \text{si } t\geq 1 \end{cases} \leq (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$$

Or $t \mapsto (t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

Donc par théorème de continuité des intégrales à paramètre, Γ est continue sur $[a,b]$. Ceci étant vrai pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, et la continuité étant une propriété locale, on a donc Γ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

▨

* Critère de Cauchy : [DAN] p. 235-236

On suppose que $b \in \mathbb{R}$ (preuve similaire si $b = +\infty$).

Soit : $$F : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$$ $$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

* Montrons que F admet une limite lorsque x tend vers b.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b[^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. Soit $\varepsilon > 0$.

Choisissons $c \in [a,b[$ vérifiant : $\forall x,y \in [c,b[, \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$.

Choisissons aussi $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $a_n \in [c,b[$.

Alors $\forall n,p \geqslant n_0$, $|F(a_n) - F(a_p)| = \left| \int_{a_p}^{a_n} f(t)dt \right| < \varepsilon$.

Donc $(F(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, or $\mathbb{K}$ est complet, donc elle converge. Donc F admet une limite en b, donc l'intégrale converge.

* Supposons que l'intégrale soit convergente, c'est-à-dire que F admet une limite en b. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $c \in [a,b[$ tel que :

$$\forall x \in [c,b[, \quad \left|F(x) - \lim_{t\to b} F(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $\forall x,y \in [c,b[$: $\left| \int_x^y f(t)dt \right| = |F(y) - F(x)| < \varepsilon$.

* Règle d'Abel : [MEY 0] p. 58-59 ou [DAN] p. 238-239

* Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Comme $f \geqslant 0$ et $\lim_{x\to b} f(x) = 0$, on a pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut trouver $c \in [a,b[$ tel que :

$$\forall x \in [c,b[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(x,y) \in [c,b[^2$. On a par la 2nde formule de la moyenne :

$$\exists z \in [x,y] \text{ tel que : } \int_x^y f(t)g(t)\,dt = f(x^+) \cdot \int_x^z g(t)dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_x^y f(t)g(t)dt \right| \leqslant 2M\varepsilon.$$

Grâce au critère de Cauchy, on a donc la cv de l'intégrale.

* Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: On note $g = \mathrm{Re}(g) + i \cdot \mathrm{Im}(g)$. Les hypothèses sur g nous donnent :

$$\forall x \in [a,b[, \left| \int_a^x \mathrm{Re}(g(t))\,dt \right| = \left| \mathrm{Re}\left(\int_a^x g(t)dt \right) \right| \leqslant \left| \int_a^x g(t)dt \right| \leqslant M$$

(En effet, $\forall z \in \mathbb{C}$ on a : $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$).

Ainsi, f et $\mathrm{Re}(g)$ vérifient les hypothèses pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \int_a^b f(t) \cdot \mathrm{Re}(g(t))dt$ converge.

Par un raisonnement similaire, on a aussi $\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{Im}(g(t))dt$ qui cv.

D'où finalement la convergence de $\int_a^b f(t) \cdot g(t)dt$.

* Semi-convergence de l'intégrale de Dirichlet : [DAN] p. 239-241

* Étude de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$, $\alpha>0$:

Soit $f : \begin{array}{l}[1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}\end{array}$. f est positive et décroissante, et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

De plus, $\forall x\geqslant 1$, $\left|\int_1^x \sin(t)\,dt\right| = |\cos(x)-\cos(1)| \leqslant 2$.

Donc d'après la règle d'Abel, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ converge $\forall \alpha>0$.

* Étude de $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$, $\alpha>0$:

$\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc l'intégrale est convergente ssi $\alpha-1<1 \Rightarrow \alpha<2$.

Finalement, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt \text{ cv ssi } \alpha\in\,]0;2[.}$ (en particulier, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ cv).

* On montre avec le même principe que $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt$ cv ssi $\alpha\in\,]0;1[$.

* Donc comme $\forall t\in\,]0;+\infty[$, $e^{it}=\cos(t)+i\cdot\sin(t)$, alors $\int_0^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt$ cv ssi $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt$ convergent, donc ssi $\alpha\in\,]0;1[$.

* $\forall t\in\mathbb{R}$, $\sin^2(t)=\frac{1-\cos(2t)}{2}$.

Par le critère d'Abel, on a $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ converge.

Or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$ diverge. Donc $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ diverge.

* $\forall t\geqslant 1$, $0\leqslant \frac{\sin^2(t)}{t} \leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$.

Or $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ diverge, donc $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ diverge, et donc $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ diverge.

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente. ∅

* Calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$: [DAN] p. 243-245

On considère, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

* Convergence de I_n et J_n $\forall n\in\mathbb{N}$:

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \underset{0}{\sim} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \underset{0}{\sim} 2n+1$.

Ces applications sont prolongeables par continuité en 0, donc les 2 intégrales sont convergentes. (4)

* Convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calcul de la limite :

On effectue le changement de variable : $x = (2n+1)t$:

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cancel{(2n+1)}\,x}\,\cancel{(2n+1)}\,dx = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ et $dx = (2n+1)dt$

D'où la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

* Égalité des limites de J_n et I_n :

Soit $f :]0;\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$

→ Montrons qu'elle est prolongeable en 0 :

$$f(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\cdot\sin(t)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \underset{0}{\sim} -\frac{t}{6} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

→ Convergence de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lemme de Lebesgue : [DAN] p. 221-223} \\ f\in C_M([a,b]) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cdot e^{int}\,dt = 0\end{array}}$$

En appliquant ce lemme, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(t)\cdot\sin(nt)\,dt = 0 \quad\Rightarrow\quad (I_n - J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente vers } 0.$$

Or $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt .$$

* Calcul de somme : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in]0;\frac{\pi}{2}]$:

$$\sum_{k=-n}^{n} \cos(2kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikt}\right)$$

Or $\forall t\in]0;\frac{\pi}{2}]$, $e^{2ikt} \neq 1$ (si $k\neq 0$) d'où :

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikt} = e^{-2int}\cdot\frac{e^{2(2n+1)it}-1}{e^{2it}-1} = \frac{\overbrace{\cancel{e^{-2int}}\cdot e^{(2n+1)it}}^{=1}}{e^{it}} \times \frac{e^{(2n+1)it} - e^{-(2n+1)it}}{e^{it} - e^{-it}}$$

$e^{it}(e^{it} - e^{-it}) = e^{2it} - e^{it-it} = e^{2it} - 1$

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikt} = \frac{e^{(2n+1)it} - e^{-(2n+1)it}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{\sin(2n+1)t}{2} \times \frac{2}{\sin(t)} = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-n}^{n} \cos(2kt) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}.$$

* Calcul de la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=n}^{n} \cos(2kt)\,dt = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{\pi/2} \cos(2kt)\,dt$$

$$= \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(0)\,dt$$

$$= \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \left(\underbrace{\frac{\sin(k\pi)}{2k}}_{0} - \underbrace{\frac{\sin(0)}{2k}}_{0}\right) + \underbrace{\int_0^{\pi/2} 1\,dt}_{\pi/2}$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad J_n = \frac{\pi}{2}.$$

D'où $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

▨