221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.

Inverser II et III ?

I] Définitions et premiers exemples.

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}_M([a,b[, \mathbb{K})$.

Déf 1: On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge si $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ a une limite dans $\mathbb{K}$.

Rmq: se généralise facilement à $[a,b]$, $]a,b]$.

Déf 2: Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}_M(I)$. f est dite intégrable sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ converge. On note $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

Ex 3: Intégrale de Riemann : $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ ($\int_0^1$: $\alpha < 1$)
- $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$

Ex 4: Fonction Gamma :

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

II] Critères de convergence.

Ppté 5: Critère de Cauchy :

$\int_a^b f$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[, \forall x,y \in [c,b[, \left|\int_x^y f\right| < \varepsilon$

Ppté 6: Règle d'Abel :

$f, g \in \mathcal{C}_M([a,b[)$ avec : $\begin{cases} f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ décroissante et } \lim_{x \to b} f(x) = 0 \\ g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K} \text{ et } \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in [a,b[, \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| < M. \end{cases}$

Alors $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ converge.

Ex 7: Semi-convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ cv ssi $0 < \alpha < 2$

III] Cas positif.

Ppté 8: $f, g \in \mathcal{C}_M([a,b[, \mathbb{R}_+)$.

$0 \leq f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b g(t)\,dt \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \text{ cv.} \\ \int_a^b f(t)\,dt \text{ dv} \Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt \text{ dv.} \end{cases}$

Ppté 9: $f, g \in \mathcal{C}_M([a,b[, \mathbb{R}_+)$.

- $f = O_b(g) \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b g(t)\,dt \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \text{ cv et } \int_x^b f(t)\,dt = O_b\left(\int_x^b g(t)\,dt\right) \\ \int_a^b f(t)\,dt \text{ dv} \Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt \text{ dv et } \int_a^x f(t)\,dt = O_b\left(\int_a^x g(t)\,dt\right) \end{cases}$
- De même pour $f = o_b(g)$.
- $f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.
  - Si elles cv, als $\int_x^b f(t)\,dt \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)\,dt$
  - Si elles dv, als $\int_a^x f(t)\,dt \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt$.

IV] Méthodes de calcul d'intégrales impropres.

Ppté 10: Intégration par parties généralisée :

Soient $f, g \in C^1([a,b[, \mathbb{K})$.

1. $\lim_{x \to b} f(x)g(x)$ existe $\Rightarrow \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ sont de même nature.
2. Si elles convergent, alors:

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \left[\lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)\right] - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Ex 11: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Ppté 12: Changement de variable :

$\begin{cases} u \in C^1([a,b[, [\alpha,\beta[) \text{ bijective et strictement croissante.} \\ f \in C_M([\alpha,\beta[, \mathbb{K}) \end{cases}$

Alors :

$\int_a^b u'(t) \cdot f(u(t))\,dt$ et $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.