DÉV : Compétition de saut en hauteur.

On note X = numéro du dernier saut réussi.

S_n l'évènement : "réussir le saut n".

On a donc : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S_n) = r_n = \dfrac{1}{n}. \\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad k \neq \ell \Rightarrow S_k \perp\!\!\!\perp S_\ell . \end{cases}$

① $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}})$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_i) \right) \times \mathbb{P}(\overline{S_{n+1}})$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right) \times \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n!} \times \frac{n}{n+1}$$

Soit $\boxed{\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{n}{(n+1)!}}$

② $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) \times n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$

On va éviter ce calcul en utilisant la fonction génératrice et les séries entières.

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[t^X] \overset{\text{formule du transfert}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) \cdot t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} t^n .$$

On note $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. donc $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, c'est une série entière.

* Calcul du rayon de convergence : Règle de d'Alembert :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{(n+2)!} \times \frac{\cancel{(n+1)!}}{n} = \frac{n+1}{n^2+2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc cette série a un rayon de convergence infini.

* <u>Calcul de la somme</u> : $\forall t \in \mathbb{R}$:

<u>Rmq</u> : $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$

$$\varphi_X(t) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}}_{\substack{\text{D.S.E.} \\ \text{de exp.}}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = e^t - \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\varphi_X(t) = e^t - \frac{1}{t}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}}_{\text{idem}} - 1\right] \Rightarrow \boxed{\varphi_X(t) = e^t - \frac{e^t}{t} + \frac{1}{t}}$$

* <u>Calcul de l'espérance</u> :

$$\varphi_X'(t) = e^t - \frac{t \cdot e^t - e^t}{t^2} - \frac{1}{t^2}$$

$u(t) = te^t - e^t$
$u'(t) = \cancel{e^t} + te^t - \cancel{e^t}$
$= te^t$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[X] = \varphi_X'(1) = e - 1} \approx 1,72$$

* <u>Calcul de la variance</u> : démo à faire pour gagner du temps.

$\varphi_X''(1) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]$ et $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

$\Rightarrow Var(X) = \varphi_X''(1) + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$.

$$\varphi_X''(t) = e^t - \frac{t^3 e^t - 2t^2 e^t + 2te^t}{t^4} + \frac{2}{t^3}$$

$$\Rightarrow \varphi_X''(1) = \cancel{e} - \frac{\cancel{e} - \cancel{2e} + \cancel{2e}}{1} + 2 = 2.$$

$$\Rightarrow Var(X) = 2 + (e-1) - (e-1)^2 = \cancel{2} + e - \cancel{1} - e^2 + 2e - \cancel{1}$$

$$= 3e - e^2 \qquad \Rightarrow \boxed{Var(X) = e(3-e)} \approx 0,77$$