[KAR]
[MEY 0]
[DUP]
[HAU]
[MEY 1]

260 Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on notera X et Y des v.a.r. $(X : \Omega \to \mathbb{R})$.

① V.a.r. discrètes, espérance, variance.

univers-image.

Déf 1 : X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Ex 2 : À compléter au fur et à mesure de la leçon :

Loi de X	$X(\Omega)$	$\mathbb{E}[X]$	Var(X)	Modélisation
$\mathcal{B}(p)$	$\{0;1\}$	p	$p(1-p)$	pile ou face + général
$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	np	$np(1-p)$	nb de "pile(s)" (1)
$\mathcal{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	Équiprobabilité
$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	premier succès
$\mathcal{H}(N,n,p)$	$[\![0;n]\!]$	np	$np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$	tirage sans remise de n parmi N (sondage).

Déf 3 : Soit X tq $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$.
L'espérance de X est le nombre :
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot \mathbb{P}(X = x_n)$$ quand il y a CVA de cette série.
Dans ce cas, on dit que X admet une espérance.

(Contre-ex : X à valeurs dans $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $\mathbb{P}(X=2^n) = \frac{1}{2^n}$.)

Thm 4 : du transfert :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Si $f(X)$ admet une espérance, alors :
$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \cdot \mathbb{P}(X = x_n)$$

Déf 5 : X admet une <u>variance</u> si $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$.
Dans ce cas : $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$$

Prop 6 : <u>Formule de Koenig-Huygens</u> :
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Déf 7 : On définit la fonction génératrice de X, pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$ ainsi :
$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\cdot t^k$$

(**Prop 8 :** $\varphi_X'(1) = \mathbb{E}[X]$ et $\varphi_X''(1) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]$.) démo ds le dév. ?

tjs vrai.

App 9 (DÉV) : Lors d'une compétition de saut en hauteur, un athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$ Il n'a droit qu'à un seul essai par barre. On suppose les sauts indépendants et que la probabilité de réussir le n-ème saut est $r_n = \frac{1}{n}$.
① Calculer la loi de X, la v.a.r. représentant le numéro du dernier saut réussi.
② Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

② Couples de v.a.r. discrètes. Covariance.

Déf 10 : On appelle <u>loi conjointe</u> de X et Y la loi de $Z=(X,Y)$. X et Y sont les <u>lois marginales</u> de Z.

Ex 11 : $X \sim \mathcal{B}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{B}(p_2)$ $\perp\!\!\!\perp$ alors leur loi conjointe est :

	$\mathbb{P}(Y=0)$	$\mathbb{P}(Y=1)$
$\mathbb{P}(X=0)$	$(1-p_1)(1-p_2)$	$(1-p_1)p_2$
$\mathbb{P}(X=1)$	$p_1(1-p_2)$	$p_1 p_2$

Prop 12 : $Z=(X,Y)$ alors $\forall x \in X(\Omega)$:
$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Z=(x,y))$$ et de-m̂ pour Y.

Prop 13 : de l'espérance :

- Linéarité : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[X+tY] = \mathbb{E}[X] + t \cdot \mathbb{E}[Y]$.
- Cauchy-Schwarz : si X, Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet un moment d'ordre 1 et :
$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2]}$$
- Indépendance : $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

Déf 14 : X, Y et XY admettent un moment d'ordre 1.
$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big]$$
si $=0$, on dit que X et Y sont non-corrélées.

Prop 15 : de la covariance :

- $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)$
- Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.
- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathrm{Cov}(X+Y) = 0$ ⚠ réciproque fausse ! (vraie si $X, Y \sim \mathcal{B}(p)$).

Ex 16 : Une particule se déplace sur une droite graduée.
~~À~~ $t=0$, elle est en O.
À chaque instant, elle saute à dte avec une proba p, et à gauche avec une proba $1-p$.
Calculer son espérance et sa variance.
si j'ai le tps... j'en doute

Déf 17 : Dte de régression affine :

On veut approximer Y avec une fonction affine en X, optimisé au sens des moindres carrés :
$$\text{minimiser } \quad f(a,b) = \mathbb{E}\left[(Y - (aX+b))^2\right].$$

Déf 18 : Coefficient de corrélation linéaire :

si $\sigma_X \neq 0$, $\sigma_Y \neq 0$: $\quad \rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ (sinon, $\rho_{X,Y} = 0$).

Écart-type $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Prop / Déf 19 :

f atteint son minimum pour :

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)} \quad \text{et} \quad b = \mathbb{E}[Y] - a\mathbb{E}[X]$$

La dte $y = ax + b$ est appelée dte de régression affine de Y en X.

Commentaires jury :

- ① Trop long, ② trop court.
- $\boxed{\text{Dév}}$: ajout interprétation $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.
  + donner déf. mathématique de X.
  $(\inf_k (Y_k = 0) - 1)$.
  ↳ existence de l'inf ?
  + ajouter comparaison avec ~~explicite~~ géométrique.
- + intérêt φ_X.
  ↳ Loi discrète caractérisée par fct° génératrice.

∃ v.a.r. dont la loi est discrète