DÉV : Collier de perles

① Démontrer la formule de Burnside :

$$|\Theta| = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |fix(g)|$$

où :

→ Θ est l'ensemble des orbites

→ $fix(g)$ est l'ensemble des points fixes de E sous l'action de g.

On va calculer le cardinal de l'ensemble :

$$K = \{(g,x) \in G\times E \mid g\cdot x = x\}$$

D'une part :

$$|K| = \sum_{g\in G} |\{x\in E \mid g\cdot x = x\}| = \sum_{g\in G} |fix(g)|.$$

D'autre part :

stabilisateur de x

$$|K| = \sum_{x\in E} |\{g\in G \mid g\cdot x = x\}| = \sum_{x\in E} |G_x|$$

Or par le théorème de Lagrange on a :

$$|G_x| = \frac{|G|}{[G:G_x]}$$

On a aussi :

orbite de x

$[G:G_x] = |\Theta_x|$ car on peut montrer que :

$$\begin{array}{ccc} (G/G_x)_g & \longrightarrow & \Theta_x \\ g\,G_x & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$$ est un isomorphisme.

NON! C'est juste bien défini et bijectif! ⚠ Ce ne sont pas des groupes !!

Donc :

les orbites forment une partition de E

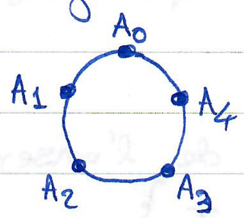
$$|K| = \sum_{x\in E} \frac{|G|}{|\Theta_x|} = \sum_{\Theta_x\in\Theta} \sum_{y\in\Theta_x} \frac{|G|}{|\Theta_x|}$$

$$= \sum_{\Theta_x\in\Theta} \frac{|G|}{|\Theta_x|} \times |\Theta_x| = \sum_{\Theta_x\in\Theta} |G| = |G|\times|\Theta|$$

D'où $\sum_{g\in G} |fix(g)| = |G|\times|\Theta|$ d'où le résultat recherché.

(2) En déduire le nombre de colliers possibles de 5 perles, où chaque perle peut prendre m couleurs différentes.

Sur le cercle, on réserve 5 emplacements $A_0, \dots, A_4$ régulièrement espacés :



G est le grp diédral d'ordre 10 (conserve le pentagone régulier)

E = ensemble des colorations des 5 perles.

1 orbite correspond donc à une coloration à rotation/réflexion près.

En appliquant la formule de Burnside :

$$|\Theta| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

- $|G| = 10$
- $g = id$: m^5 colorations sont fixes
- 4 autres rotations : toutes les perles doivent avoir la même couleur : m colorations fixes.
- 5 réflexions : m^3 colorations fixes

D'où $|\Theta| = \dfrac{m^5 + 4 \times m + m^3}{10}$.

Question : et pour 4 perles ?
et pour d perles ? (⚠ parité)