301 Exercices sur les groupes.

Sujet vaste, on doit faire des choix, en regardant des applications variées.

Déf : Soit $(G, \times)$ un groupe. $H \subset G$ est un sous-groupe de G si $(H, \times)$ conserve une structure de groupe.

Pté : $(H, \times)$ sous-groupe de $(G, \times)$ si $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in H^2, \ xy^{-1} \in H. \end{cases}$

Ex1 : ss-gpe de $(\mathbb{Z}, +)$ de la forme $m\mathbb{Z}$ (L1)

(L1)

- $m\mathbb{Z}$ est un ss-gpe de $\mathbb{Z}$: direct.
- G un ss-gpe de $\mathbb{Z}$ non nul :
  - $E = \{ m \in G \mid m > 0 \}$ → non vide → contient sa borne inf. m
  - $m\mathbb{Z} \subset G$ puis $G = m\mathbb{Z}$ (avec division euclidienne)

Déf : G est monogène s'il est engendré par un seul élément. Si de plus il est fini, on dit qu'il est cyclique. ‖* Thm (Lagrange) : G gpe fini, H ss-gpe de G. Alors $\mathrm{ord}(H) \mid \mathrm{ord}(G)$.

Déf : $a \in G$ est d'ordre p si $\langle a \rangle$ est fini et d'ordre p.

Ex2 : cyclicité de $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ pour $p \in \mathbb{P}$.

(L2/L3)

- La théorie des corps nous affirme que c'est bien un groupe (algo d'euclide pour le symétrique).
- Travail sur les ordres des éléments et on utilise des résultats d'arithmétique (Fermat).

Déf : S_n est le groupe des permutations, ou gpe symétrique.

Thm :
- → S_n engendré par les transpositions
- → Décomposition en pdt de cycles à supports disjoints.

page 1

page 1

Ex 3 : centre du gpe des permutations.

Déf : $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ x * g = g * x\}$
C'est un sous-gpe de G.

- Cas $n=2$: $Z(S_2) = S_2$
- Cas $n=3$: $Z(S_3) = \{id\}$

— 10'...

Déf : $\cdot : G \times E \longrightarrow E$ $\quad$ $\begin{cases} (G,\times) \text{ un gpe} \\ E \text{ un ensemble} \end{cases}$
$(g, x) \longmapsto g \cdot x$
est une action de groupe si :

→ $\forall (s,t) \in G^2,\ \forall x \in E,\quad s \cdot (t \cdot x) = (s \times t) \cdot x$
→ $\forall x \in E,\quad e \cdot x = x$.

Déf : Orbite de $x \in E$: $\Theta_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$
Stabilisateur de $x \in E$: $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$

Ex 4 : Burnside + collier de perles (DÉV)

- Démo d'un résultat important + application à un ex. de dénombrement.

Déf : $\varphi : G \longrightarrow S(E)$ est un morphisme
$g \longmapsto \varphi_g : E \longrightarrow E$
$x \longmapsto g \cdot x$
de groupes associé à l'action.

Ex 5 : $Isom(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} |S_4| = 4! = 24 \\ |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 48$.

D gdes diag.

Action $Isom^+(C) \times D \longrightarrow D$
$(f, D_i) \longmapsto f(D_i)$

de morphisme associé :
$\varphi : Isom^+(C) \longrightarrow S(D) \simeq S_4$ $\quad$ bijectif
$f \longmapsto \varphi_f : D \longrightarrow D$
$D_i \longmapsto f(D_i)$.