[GOU ALG]

page /

université PARIS DIDEROT PARIS 7

rappel n° de place :

301 Exercices sur les groupes.

[FREMP] 10.2 p. 243

Exercice 1 :

Montrer que tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

[KET] n°2 p. 2
↳ Dév 3 p. 26

Exercice 2 : Soit p un nombre premier.

① Soit q un nombre premier qui divise $p-1$. Établir l'existence d'un élément de $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ d'ordre multiplicatif q.

② Soit q un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que q^α divise $p-1$. Montrer l'existence d'un élément de $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ d'ordre q.

③ En déduire que $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ est cyclique.

[FREMP] 1.13 p. 17

Exercice 3 :

Quel est le centre du groupe S_n (selon n) ?

[KET] dév 1 p. 200 modifié

Exercice 4 : (DÉV) → un peu court

① Démontrer la formule de Burnside :

$$|\Theta| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|$$

où :

→ Θ est l'ensemble des orbites

→ $\mathrm{fix}(g)$ est l'ensemble des points fixes de E sous l'action de g.

② En déduire le nombre de colliers possibles de 5 perles, où chaque perle peut prendre n couleurs.
↳ généralisation à d perles ?

[KAR] Dév 1 p. 331
[SKA ALG] p. 335 et p. 355

Exercice 5 :

On note C l'ensemble des 8 sommets d'un cube, $\mathrm{Isom}(C)$ le groupe des isométries qui conservent ce cube, et $\mathrm{Isom}^+(C)$ celles directes.

① Montrer que $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq S_4$.

② En déduire que $\mathrm{Isom}(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Combien d'isométries conservent C ?